

# الرياضيات للصف الأول الثانوي الفصل الدراسي الأول





## الفصل الثالث

### تطابق المثلثات

٣-١ تصنيف المثلثات

٣-٢ زوايا المثلث

٣-٣ المثلثات المتطابقة

٣-٤ إثبات التطابق - حالتى: **SAS, SSS**

٣-٥ إثبات التطابق - حالتى: **ASA, AAS**

٣-٦ المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات  
المتطابقة الاضلاع

٣-٧ المثلثات و البرهان الإحداثى



# ٣-١ تصنيف المثلثات Classifying Triangles

## الفصل الثالث

**تصنيف المثلثات وفقاً لزاواياها:** يكتب المثلث  $ABC$  على الصورة  $\triangle ABC$ ، وتُسمى عناصره باستعمال الأحرف  $A, B, C$  كما يلي:

• أضلاع  $\triangle ABC$  هي:  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$

• الرؤوس هي:  $A, B, C$

• الزوايا هي:  $\angle A$  أو  $\angle BAC$ ،  $\angle C$  أو  $\angle BCA$ ،  $\angle B$  أو  $\angle ABC$

وتُصنّف المثلثات بطريقتين: وفقاً لزاواياها أو أضلاعها. وتحتوي جميع المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، وتُستعمل الزاوية الثالثة لتصنيف المثلث.

**(فيما سبق):**

درست قياس الزوايا وتصنيفها.

**والآن:**

- أصنف المثلثات وفقاً لزاواياها.
- أصنف المثلثات وفقاً لأضلاعها.

**(المفردات):**

المثلث الحاد الزوايا  
acute triangle

المثلث المتطابق الزوايا  
equiangular triangle

المثلث المنفرج الزاوية  
obtuse triangle

المثلث القائم الزاوية  
right triangle

المثلث المتطابق الأضلاع  
equilateral triangle

المثلث المتطابق الضلعين  
isosceles triangle

المثلث المختلف الأضلاع  
scalene triangle

أضف إلى

مطوبتك

### تصنيف المثلثات وفقاً لزاواياها

### مفهوم أساسي

مثلث قائم الزاوية



إحدى الزوايا قائمة

مثلث منفرج الزاوية



إحدى الزوايا منفرجة

مثلث متطابق الزوايا



3 زوايا حادة متطابقة

مثلث حاد الزوايا



3 زوايا حادة

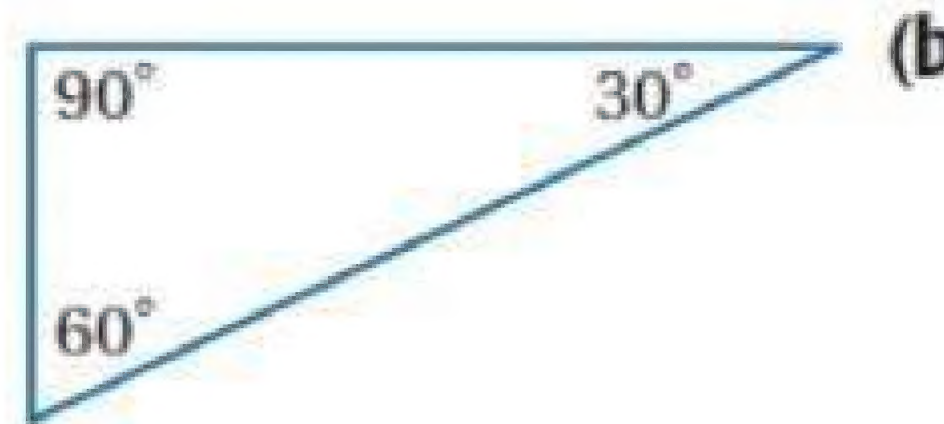


# ١-٣ تصنيف المثلثات Classifying Triangles

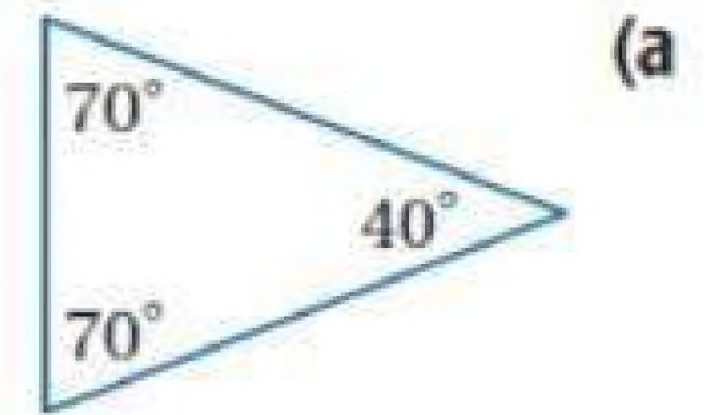
### مثال 1

#### تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها

صنّف كلّاً من المثلثين الآتيين إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



قياس إحدى زوايا هذا المثلث  $90^\circ$ ، وبما أن إحدى زواياه قائمة، فإنه مثلث قائم الزاوية.

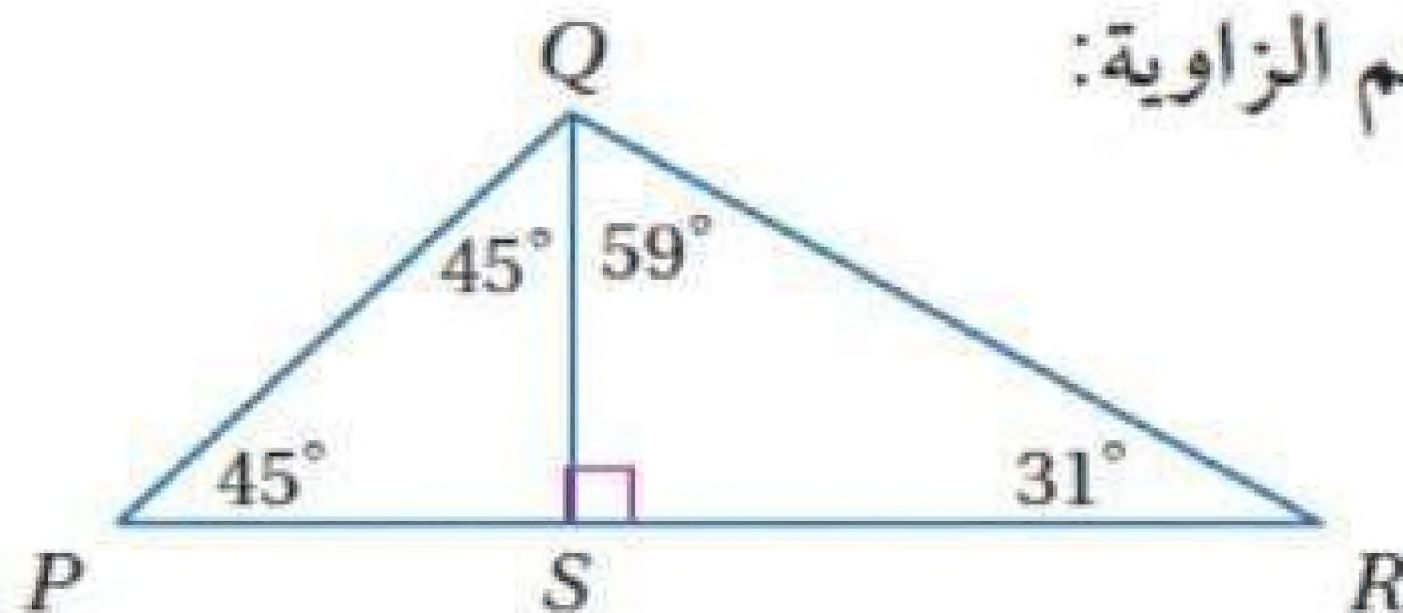


زوايا المثلث الثلاث حادّة وليست جميعها متساوية. فهذا المثلث حادّ الزوايا.

### مثال 2

#### تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً لزواياها

صنّف  $\triangle PQR$  إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



تقع النقطة  $S$  داخل  $\angle PQR$ ، وحسب مسلّمة جمع الزوايا يكون:

$$m\angle PQR = m\angle PQS + m\angle SQR$$

$$m\angle PQR = 45^\circ + 59^\circ = 104^\circ$$

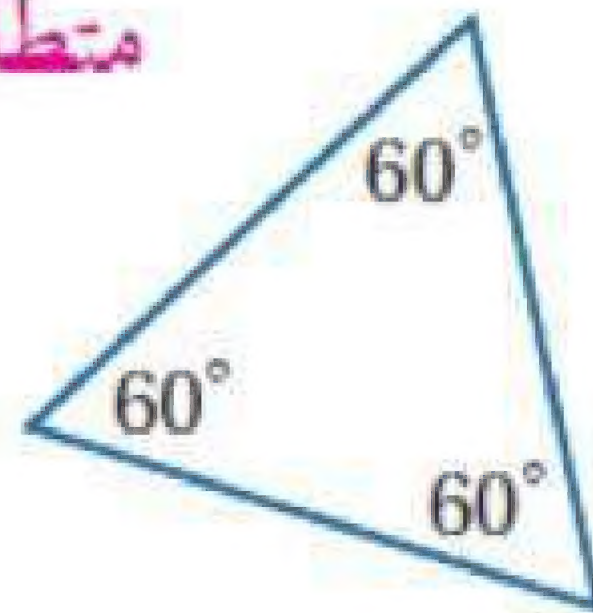
وبما أن إحدى زوايا  $\triangle PQR$  منفرجة، فإنه منفرج الزاوية.



## تحقق من فهمك

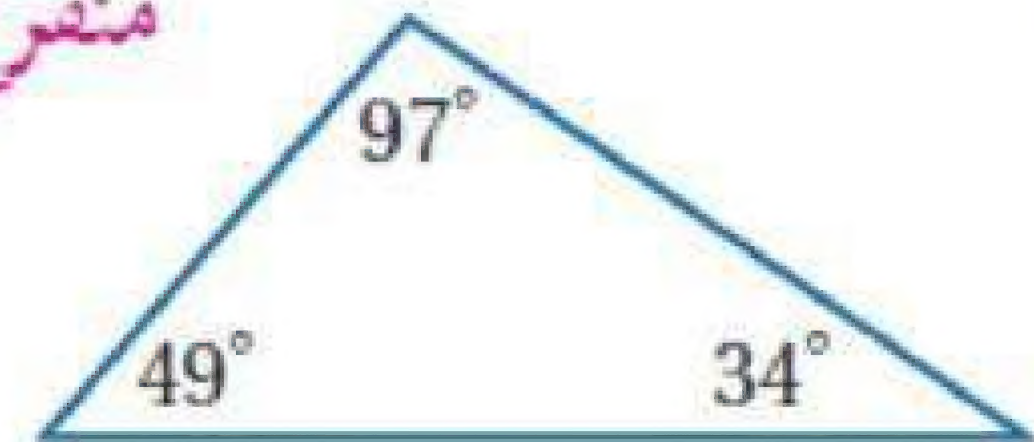
صنّف كلّاً من المثلثين الآتيين إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

متطابق الزوايا

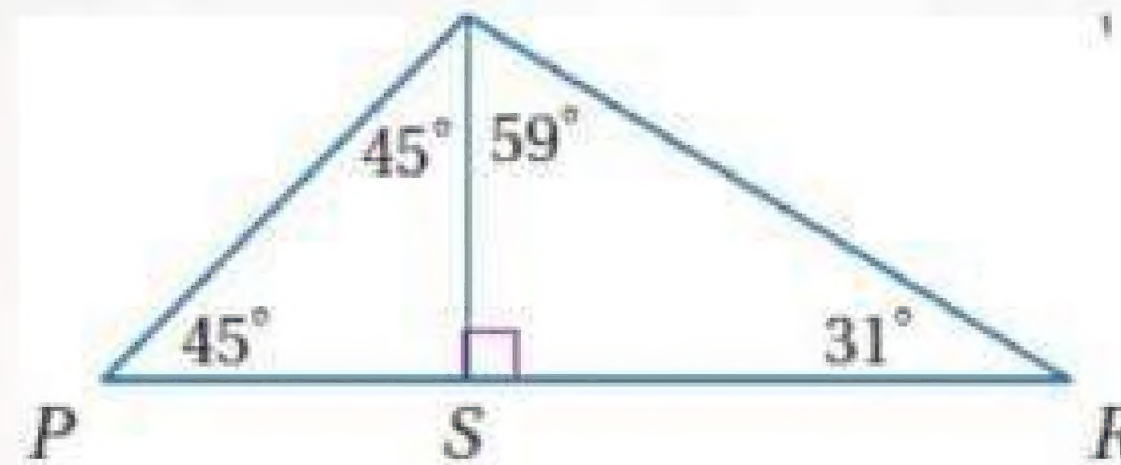


(1B)

منفرج الزاوية



(1A)



(2) استعمل الشكل أعلاه لتصنيف  $\triangle PQS$  إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

قائم الزاوية؛ الزاوية  $PSQ$  قائمة.



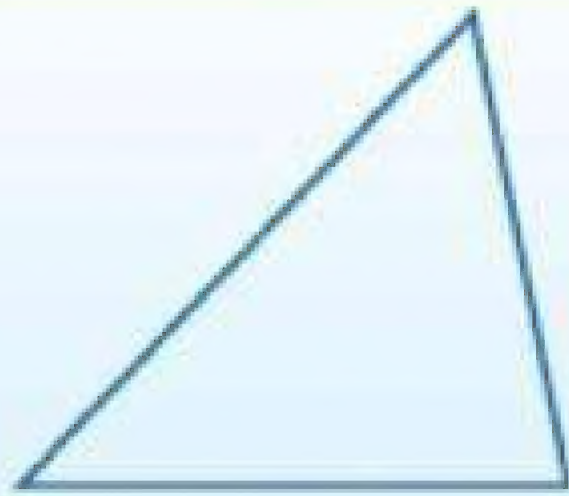
# ١-٣ تصنيف المثلثات Classifying Triangles

أضف إلى  
مطوبتك

مفهوم أساسي

تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

مثلث مختلف الأضلاع



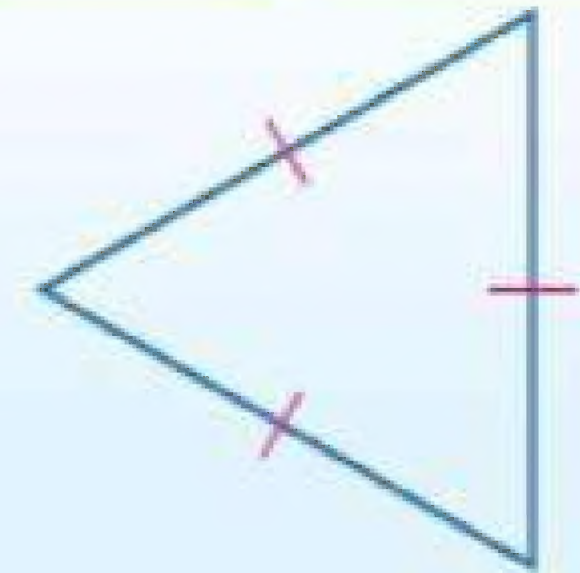
لا توجد أضلاع متطابقة

مثلث متطابق الضلعين



ضلعان على الأقل متطابقان

مثلث متطابق الأضلاع



3 أضلاع متطابقة

تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

3 مثال من واقع الحياة

**فن العمارة:** صنّف المثلث في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:  
في المثلث ضلعان قياس كل منهما 55 cm ، أي أنّ في المثلث ضلعين متطابقين.  
فيكون المثلث متطابق الضلعين.





## تحقق من فهمك

٣) قيادة السيارة والسلامة: صنف شكل زر ضوء الخطر في الهامش على يمين الصفحة وفقاً لأضلاعها.

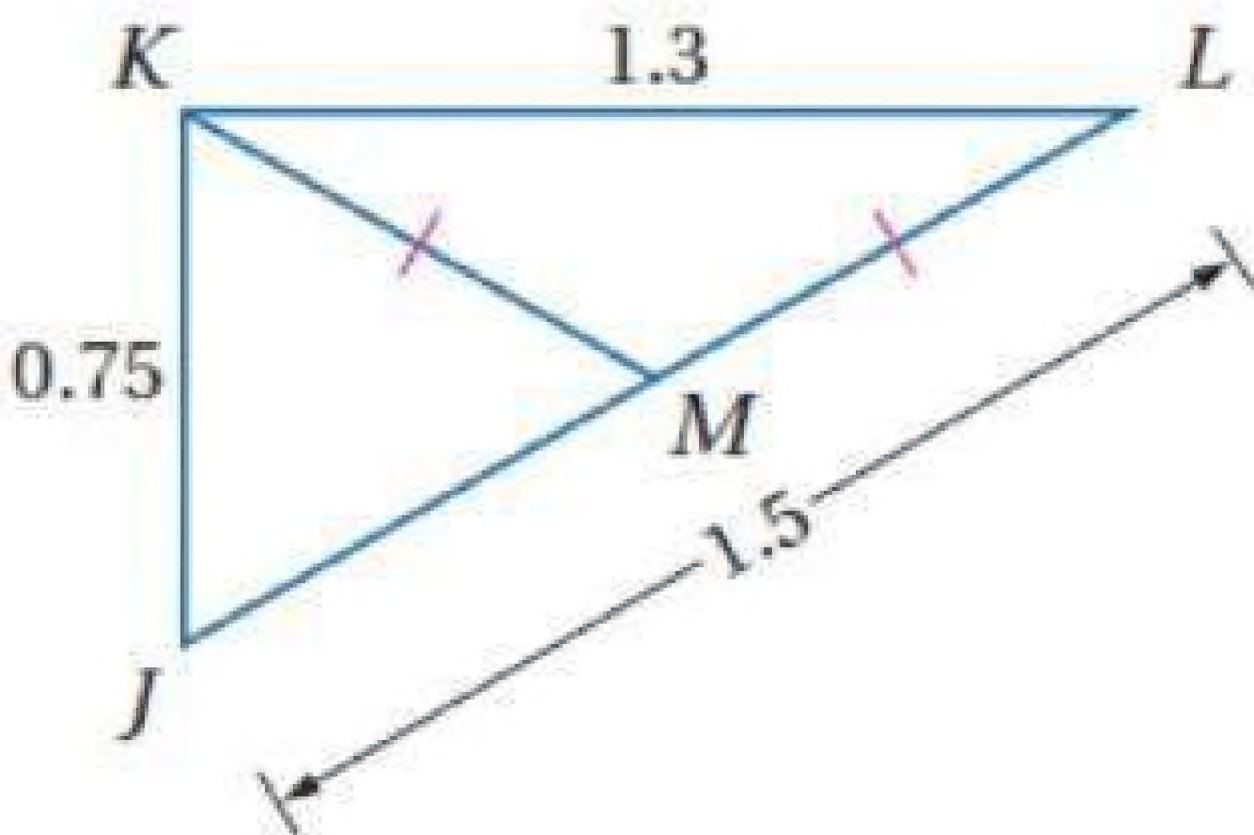


متطابق الأضلاع



مثال 4

تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقاً لأضلاعها



إذا كانت  $M$  نقطة منتصف  $JL$ ، فصنّف  $\triangle JKM$  إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضح إجابتك.

من تعريف نقطة المنتصف  $JM = ML$ .

مسلمة جمع القطع المستقيمة

$$JM + ML = JL$$

بالتعويض

$$ML + ML = 1.5$$

بالتبسيط

$$2ML = 1.5$$

بقسمة الطرفين على 2

$$ML = 0.75$$

$$JM = ML = 0.75$$

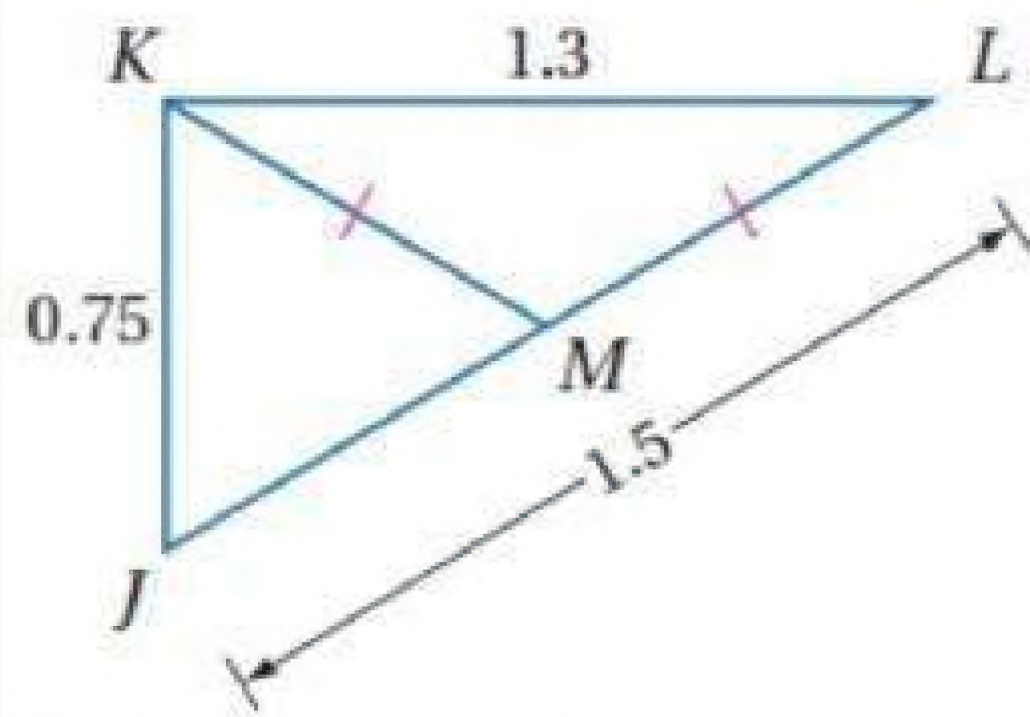
وبما أن  $\overline{KM} \cong \overline{ML}$ ، فإن  $KM = ML = 0.75$ .

وهكذا تكون قياسات أضلاع المثلث الثلاثة متساوية، أي أن الأضلاع الثلاثة متطابقة؛ لذا فإن المثلث متطابق الأضلاع.



## تحقق من فهمك

4) صنف  $\triangle KML$  إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضح إجابتك.



متطابق الضلعين؛  $KM = ML$



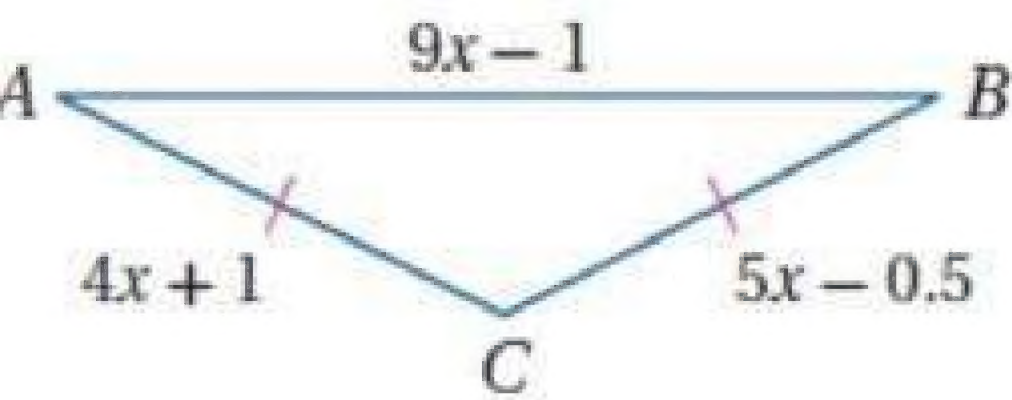
# ٣-١ تصنيف المثلثات Classifying Triangles

## الفصل الثالث

إيجاد قيم مجهولة

مثال 5

إرشادات للدراسة



**جبر:** أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الضلعين  $ABC$  في الشكل المجاور.

**الخطوة 1:** أوجد قيمة  $x$ .

$$AC = CB$$

$$4x + 1 = 5x - 0.5$$

$$1 = x - 0.5$$

$$1.5 = x$$

**الخطوة 2:** عوض لإيجاد طول كل ضلع من أضلاع المثلث:

$$AC = 4x + 1$$

$$= 4(1.5) + 1 = 7$$

$$CB = AC$$

$$= 7$$

$$AB = 9x - 1$$

$$= 9(1.5) - 1$$

$$= 12.5$$

$$x = 1.5$$

$$AC = 7$$

$$x = 1.5$$

بالتبسيط

**تحقق** للتحقق من

الإجابة في المثال 5،

اختبر ما إذا كانت

$CB = AC$  عندما نعوض

بـ 1.5 مكان  $x$  في العبارة

$5x - 0.5$  التي تمثل  $CB$ .

$$CB = 5x - 0.5$$

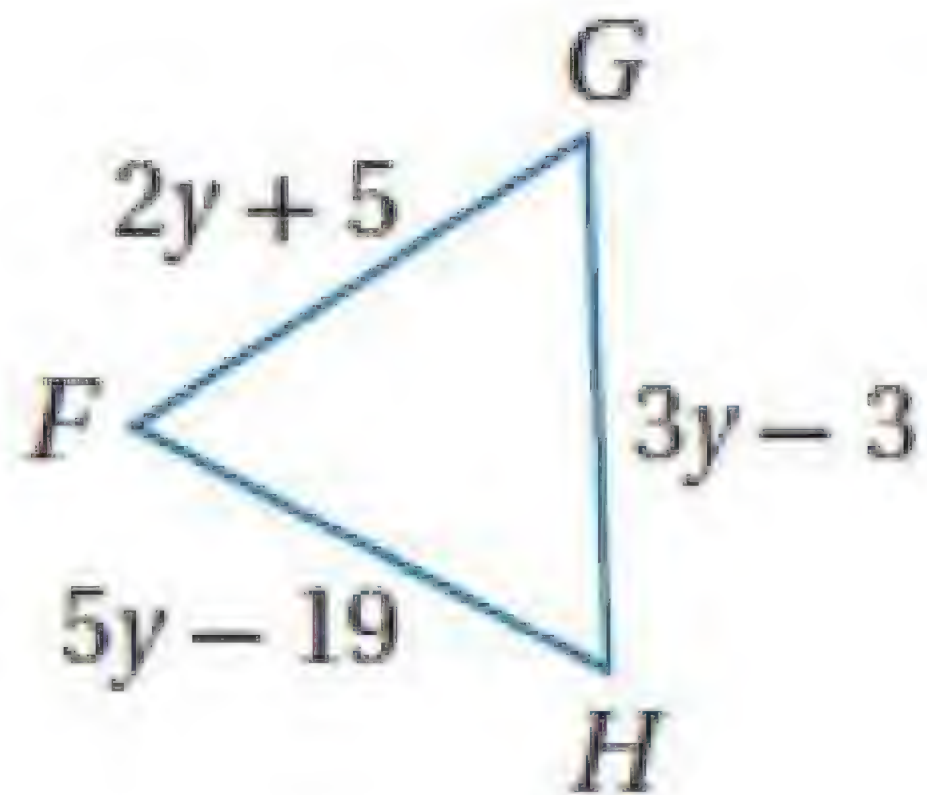
$$= 5(1.5) - 0.5$$

$$= 7 \checkmark$$



## Classifying Triangles

### تحقق من فهمك



(5) أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع  $FGH$ .

$$5y - 19 = 2y + 5$$

$$5y - 2y = 19 + 5$$

$$3y = 24$$

$$y = 8$$

$$FG = 2 \cdot 8 + 5$$

$$FG = 21$$

$$FG = GH = HF = 21$$



# ٣-١ تصنيف المثلثات Classifying Triangles

لا تأكد

فن العمارة، صنف كلًا من المثلثات الآتية وفقًا لزواياها.

المثال ١



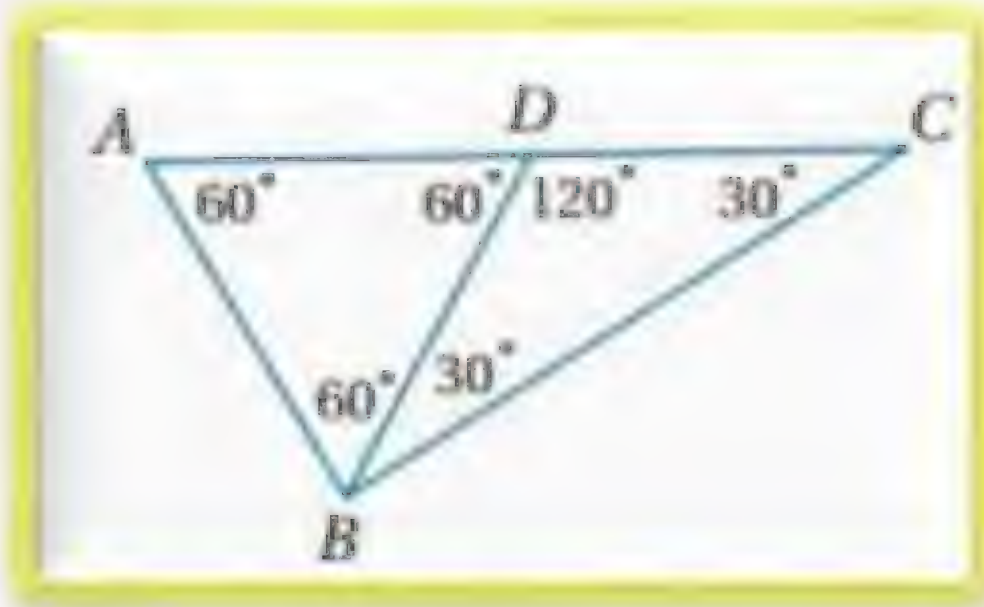
- ١) قائم الزاوية لأنه يحتوي على زاوية قياسها ٩٠
- ٢) منفرج الزاوية لأن إحدى زواياه أكبر من ٩٠
- ٣) متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية

الحل



صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حد الزوايا أو متطابق الزوايا  
أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

المثال ٢



$\triangle ABD$  (4

$\triangle BDC$  (5

$\triangle ABC$  (6

(٤)  $\triangle ABD$  متطابق الزوايا، قياس كل زاوية = 60

(٥)  $\triangle BDC$  منفرج الزاوية

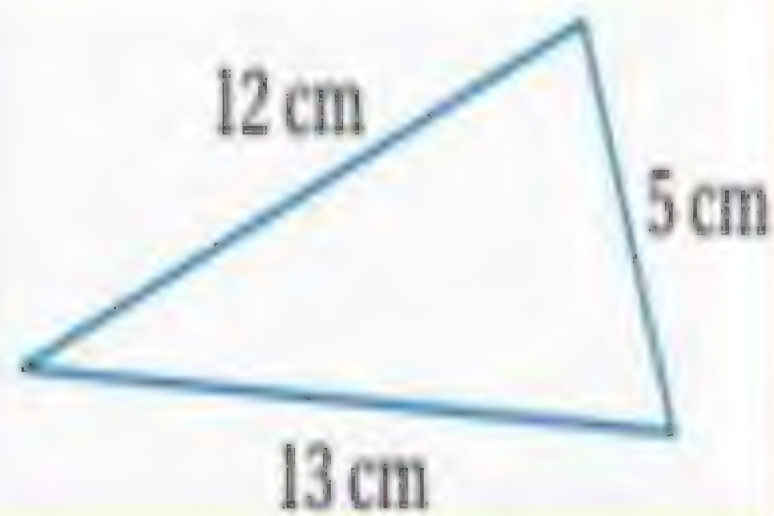
(٦)  $\triangle ABC$  قائم الزاوية، لأن  $\angle ABC = 90$

الحل



صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى متطابق  
الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

المثال ٣

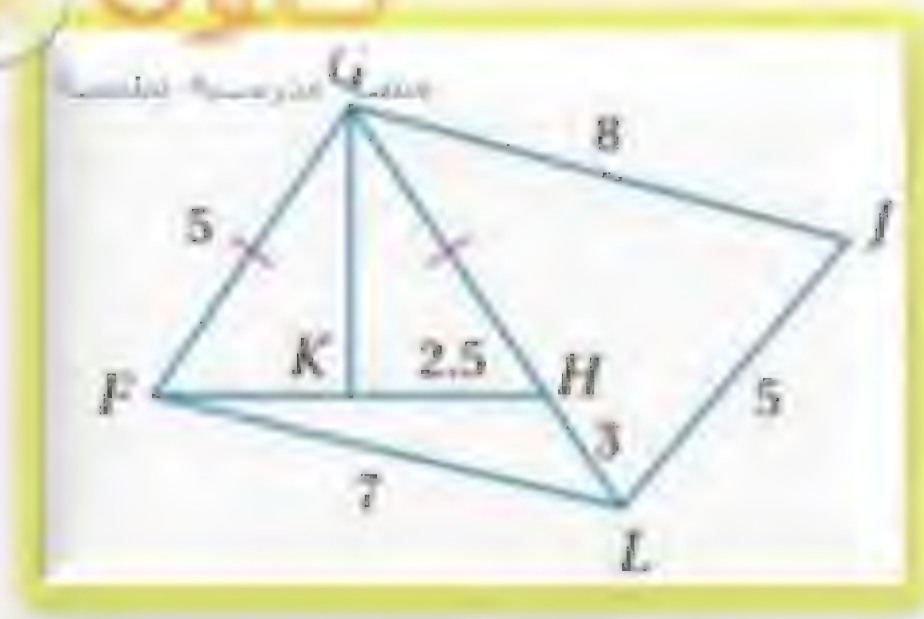


(٧) متطابق الضلعين

(٨) مختلف الأضلاع

الحل





إذا كانت النقطة  $K$  هي منتصف  $FH$ ، فصف  $K$  كلا من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

المثال ٤

$\triangle FGH$  (9)

(٩) بما أن  $K$  في المنتصف، إذن  $KH = 2.5 = FK$

$$5 = 2.5 + 2.5 = FH$$

$$5 = FH = FG = HG$$

إذن المثلث  $\triangle FGH$  متطابق الأضلاع لأن جميع أضلاعه متساوية.

$\triangle GJL$  (10)

(١٠) بما أن  $LJ = GL = 5$  إذن  $\triangle GJL$  متطابق الضلعين

$\triangle FHL$  (11)

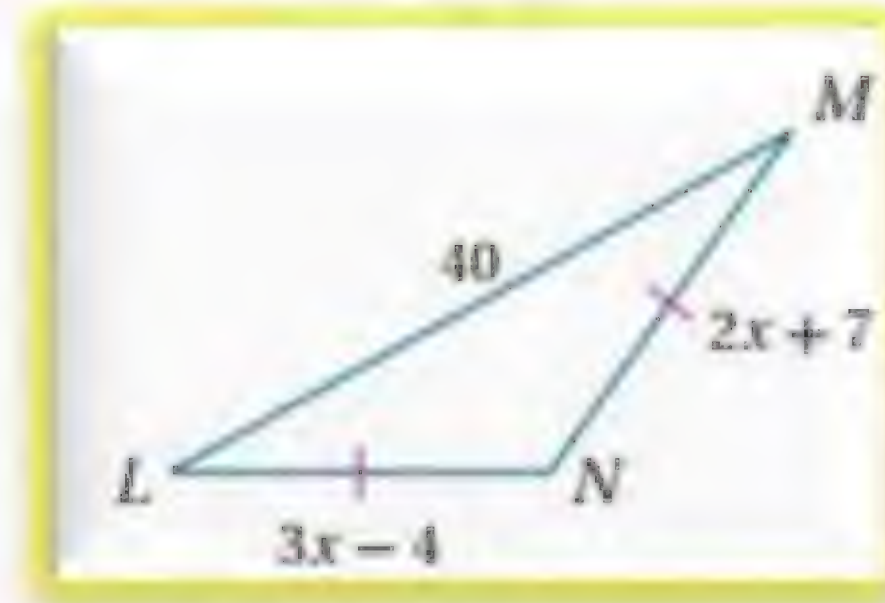
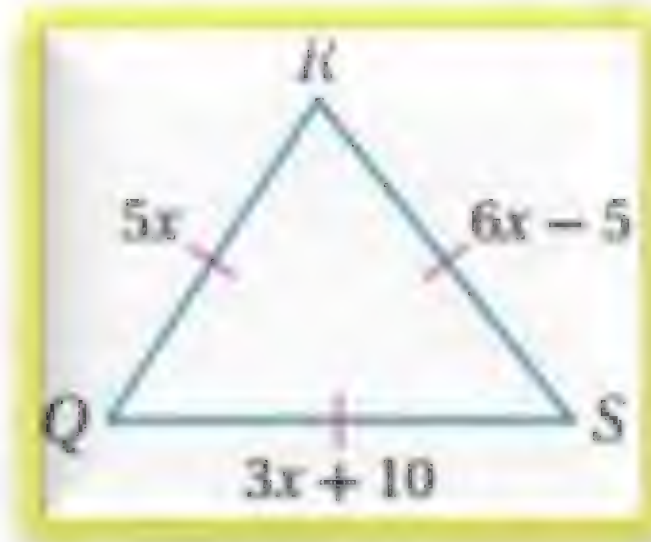
(١١) بما أن  $\triangle FHL$  جميع أطوال أضلاعه غير متساوية إذن هو مختلف الأضلاع





جبر: أوجد قيمة  $x$  وأطوال الأضلاع المجاورة في كل من المثلثين الآتيين:

المثال ٥



الحل

١٢) بما أن المثلث  $\triangle LNM$  متطابق الضلعين إذن  $LN = MN$

$$LN = MN$$

$$2X + 7 = 3X - 4$$

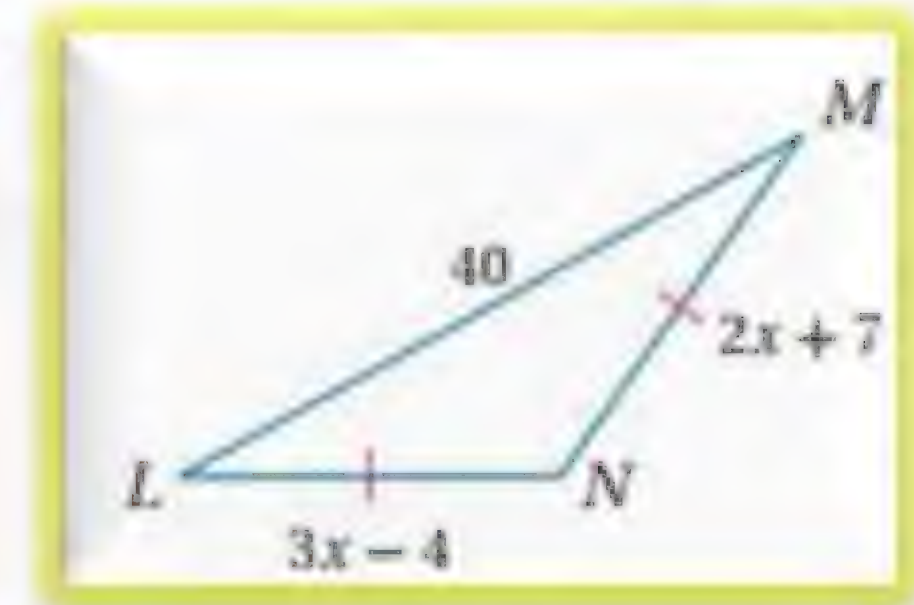
$$2X - 3X = -4 - 7$$

$$-X = -11$$

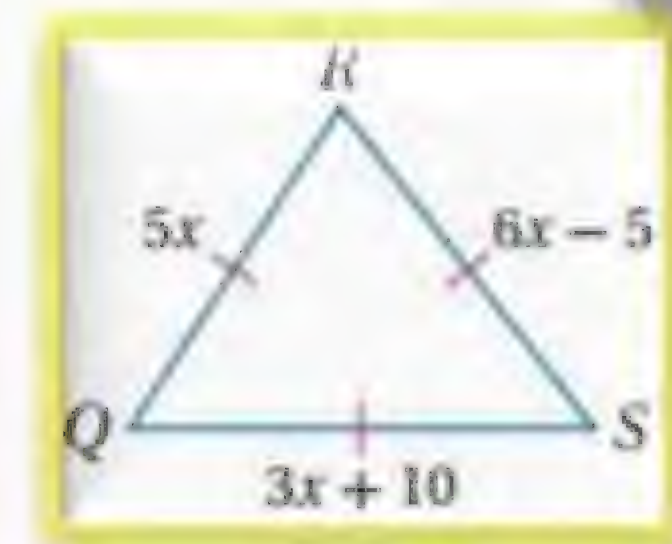
$$X = 11$$

$$MN = 2 \times 11 + 7 = 29$$

$$LN = 3 \times 11 - 4 = 29$$







١٣) بما أن المثلث  $\triangle QRS$  متطابق الأضلاع إذن

$$RS = QS = QR$$

$$6X - 5 = 5X$$

$$6X - 5X = 5$$

$$X = 5$$

$$QR = 5X = 5 \times 5 = 25$$

$$RS = 6X - 5 = 6 \times 5 - 5 = 25$$

$$QS = 3X + 10 = 3 \times 5 + 10 = 25$$





**14 مجوهرات:** افترض أن لديك سلكاً مرناً من الفولاذ غير قابل للصدأ، وتريد أن تُشكّله لتعمل قرطاً. إذا كان الجزء المثلث من القرط متطابق الضلعين، وأبعاده كما في الصورة، وطول جزء العلاقة 1.5 cm، فكم ستمتراً من السلك تحتاج لعمل القرط؟ برّر إجابتك.

**بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن:**



$$(4x - 0.8) = (3x + 0.2)$$

$$x = 0.8 + 0.2 = 1$$

**لتشكيل قرط واحد أحتاج إلى :**

$$(4x - 0.8) + (3x + 0.2) + (2x + 0.1) + 1.5 =$$

$$9x - 0.5 = 9 - 0.5$$

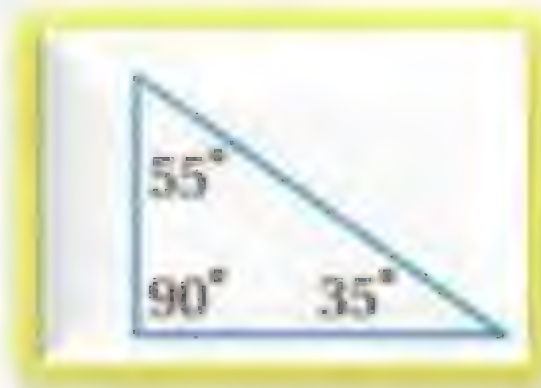
$$= 8.5$$

**إذن يمكن صنع قرط واحد سلك طوله ٨,٥**



المثال ١

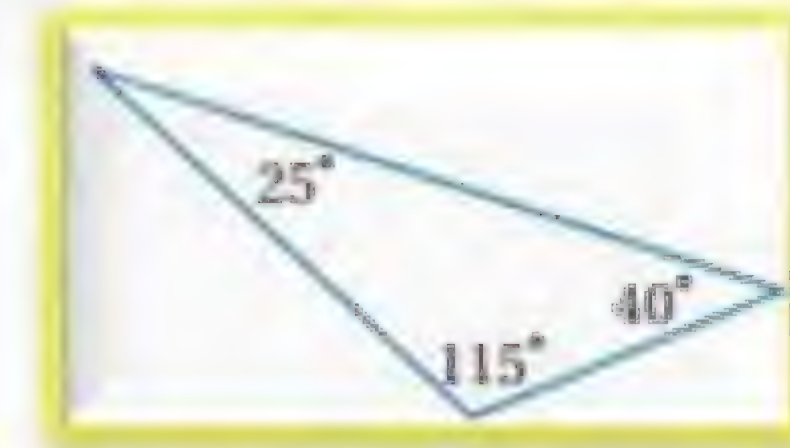
صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا  
أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



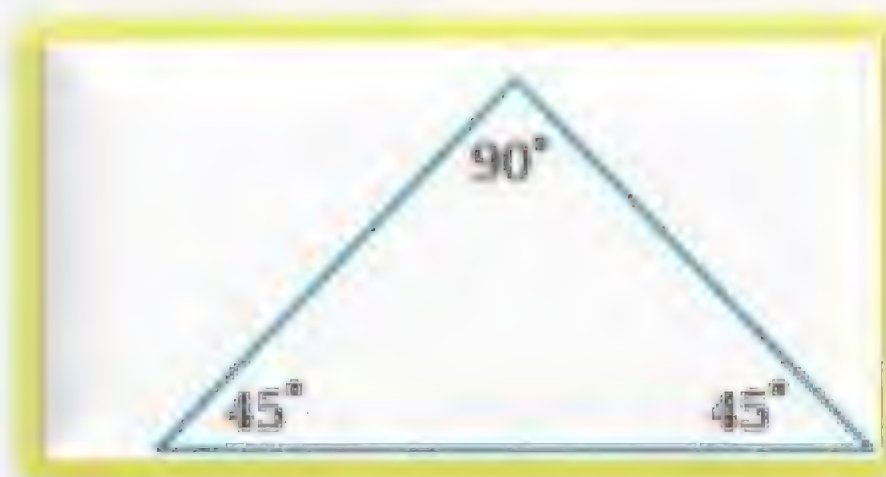
(١٧) قائم الزاوية لأنه توجد  
زاوية قائمة = 90



(١٦) حاد الزوايا لأن جميع  
زواياه أقل من 90



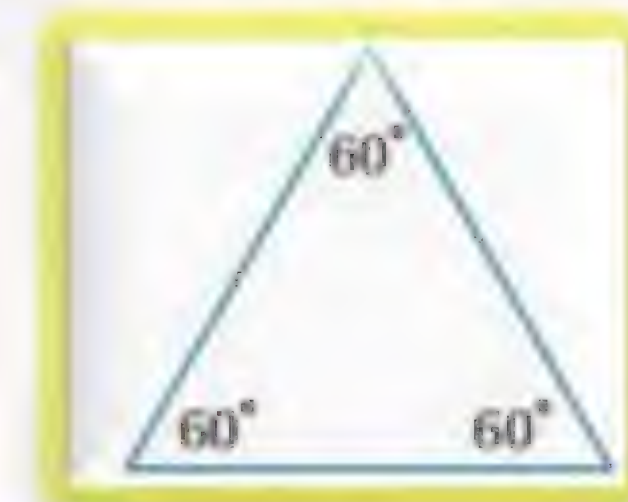
(١٥) منفرج الزاوية لأنه  
يحتوي على زاوية  
أكبر من 90



(٢٠) قائم الزاوية لأنه توجد  
زاوية قائمة = 90



(١٩) حاد الزوايا لأن جميع  
زواياه أقل من 90

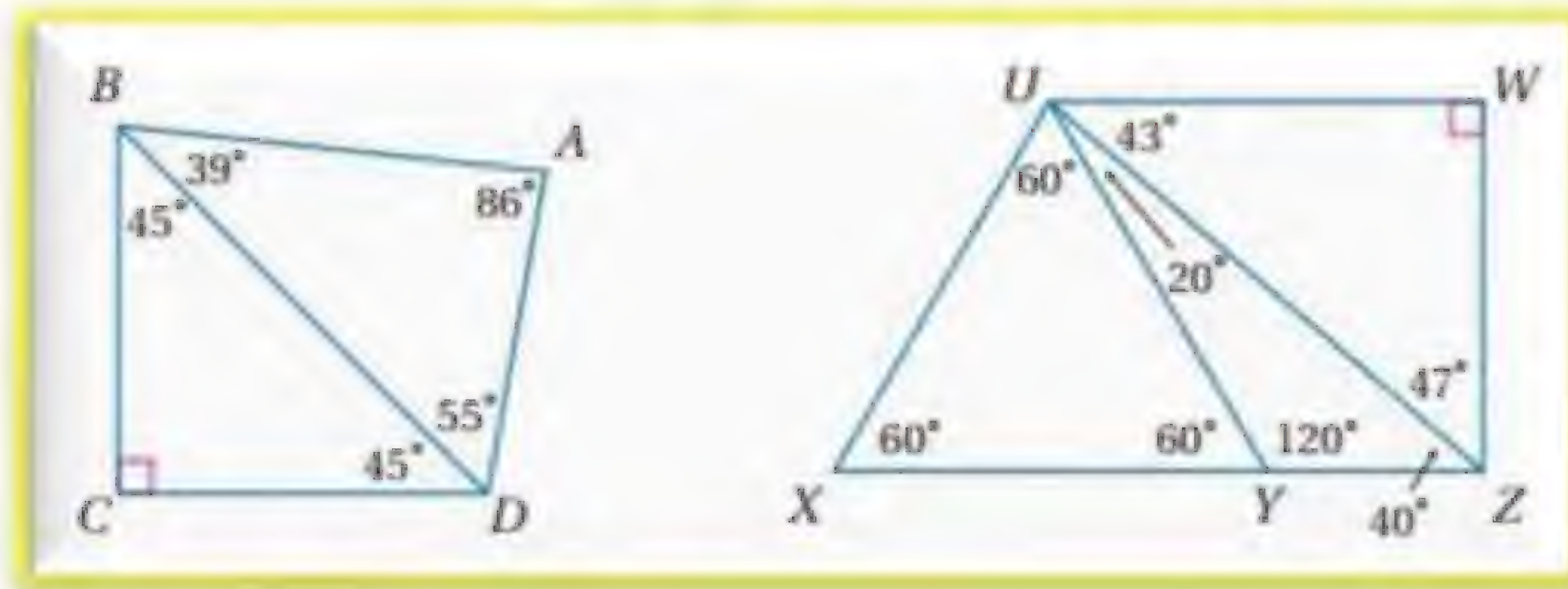


(١٨) متطابق الزوايا لأن  
جميع زواياه متساوية



صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا  
أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

المثال ٢



$\triangle ADB$  (23)

$\triangle BCD$  (22)

$\triangle UYZ$  (21)

(٢٣) حاد الزوايا، لأن جميع  
زواياه أقل من 90

(٢٢) قائم الزاوية، لأنه يوجد  
زاوية قائمة = 90

(٢١) منفرج الزاوية، لأنه  
يحتوي زاوية أكبر من 90  
وهي  $\angle UYZ = 120$

$\triangle UXY$  (26)

$\triangle UWZ$  (25)

$\triangle UXZ$  (24)

(٢٦) متطابق الزوايا، جميع  
زواياه متساوية.

(٢٥) قائم الزاوية، أنه يوجد  
زاوية قائمة = 90

(٢٤) حاد الزوايا، لأن جميع  
زواياه أقل من 90



صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع :

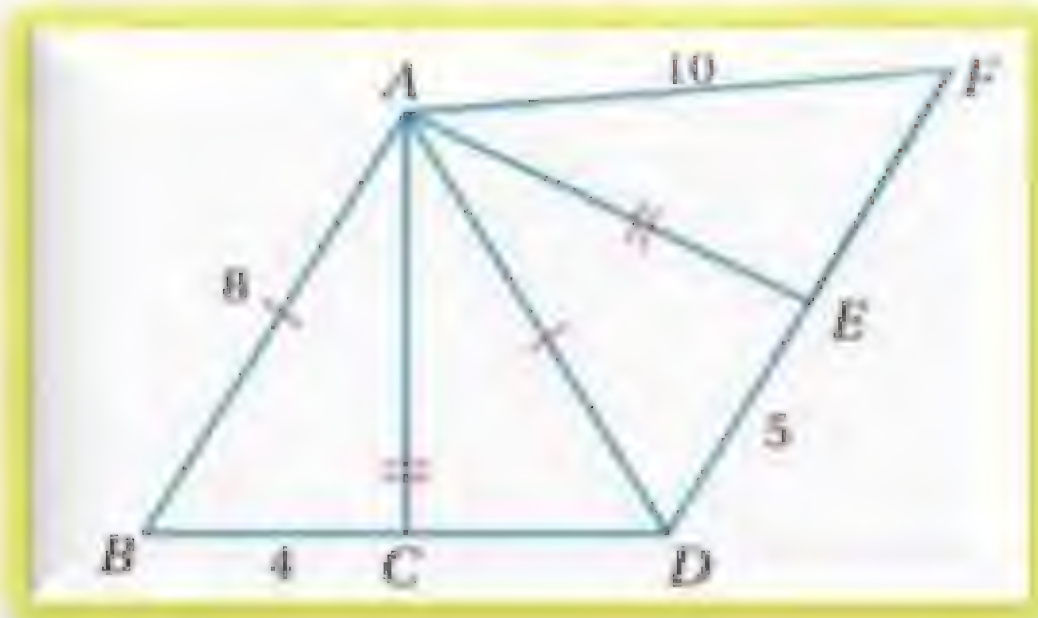
المثال ٣



الحل

(٢٨) مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

(٢٧) متطابق الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه متساوية.



إذا كانت النقطة  $C$  هي منتصف  $\overline{BD}$ ، والنقطة  $E$  منتصف  $\overline{DF}$ ،  
فصنف كلا من المثلثات الآتية وفقاً لأضلاعها:

المثال ٤

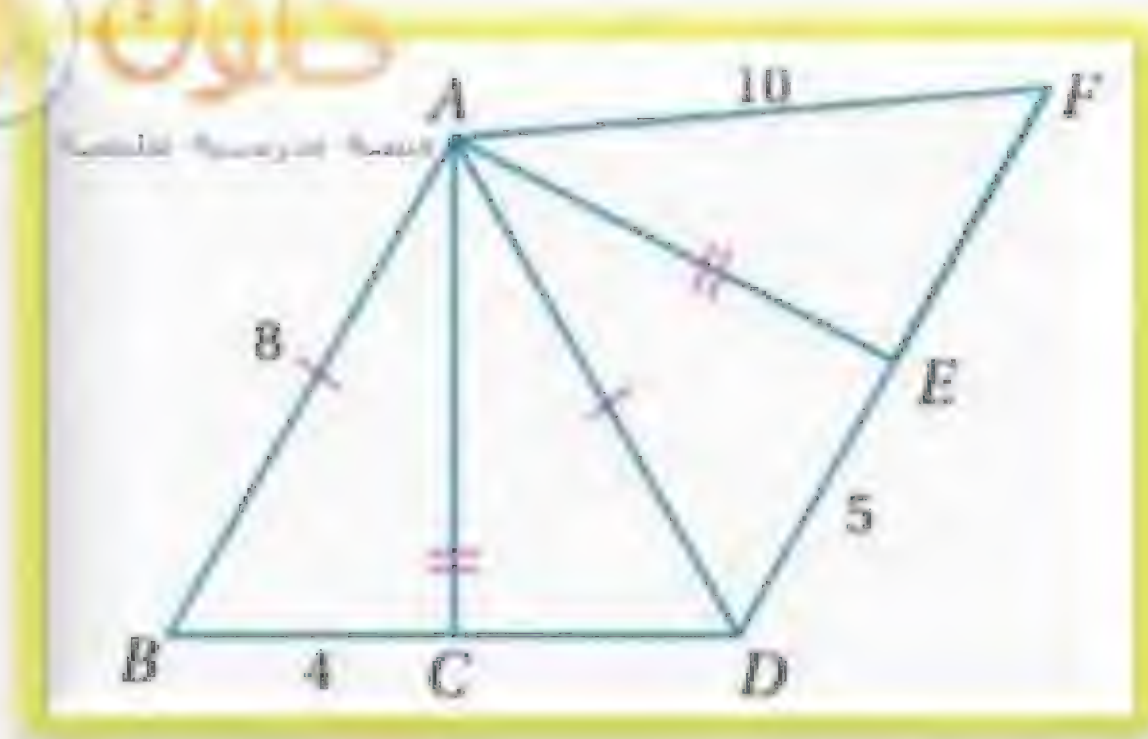
$\triangle ABC$  (29)

الحل

مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

بما أن  $C$  هي نقطة منتصف  $\overline{BD}$  إذن  $4 = \overline{CD} = \overline{BC}$   
وبما أن النقطة  $E$  منتصف  $\overline{DF}$  إذن  $5 = \overline{ED} = \overline{EF}$





متطابق الضلعين لأن  
 $\overline{FD} = \overline{AF} = 10$ .

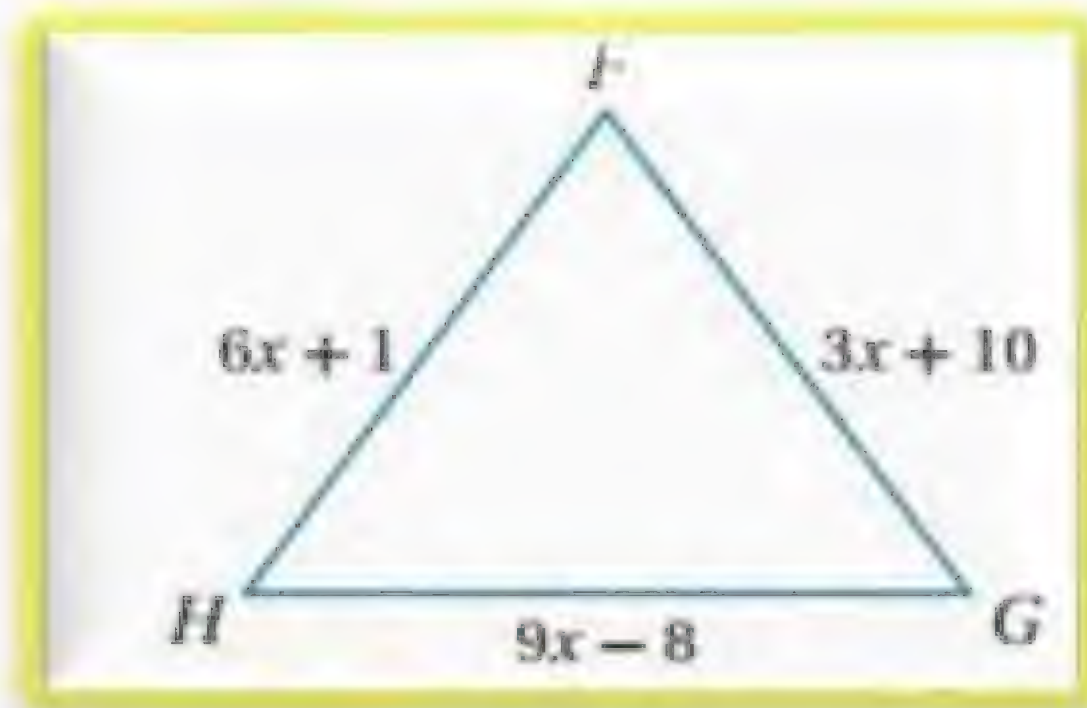
مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال  
 أضلاعه غير متساوية.

متطابق الضلعين لأن  
 $\overline{AD} = \overline{AB} = 8$ .

$\triangle ADF$  (30)

$\triangle ACD$  (31)

$\triangle ABD$  (32)



(33) **جبر:** إذا علمت أن المثلث  $\triangle FGH$  متطابق الأضلاع،  
 فأوجد قيمة  $x$  وطول كل ضلع من أضلاعه.

المثال ٥

بما أن المثلث متطابق الأضلاع إذن  
 جميع أطوال أضلاعه متساوية.



$$HF = FG$$

$$6X + 1 = 3X + 10$$

$$3X = 9$$

$$X = 3$$

$$HF = 6X + 1 = 6 \times 3 + 1 = 19$$

$$FG = 3X + 10 = 3 \times 3 + 10 = 19$$

$$HG = 9X - 8 = 9 \times 3 - 8 = 19$$



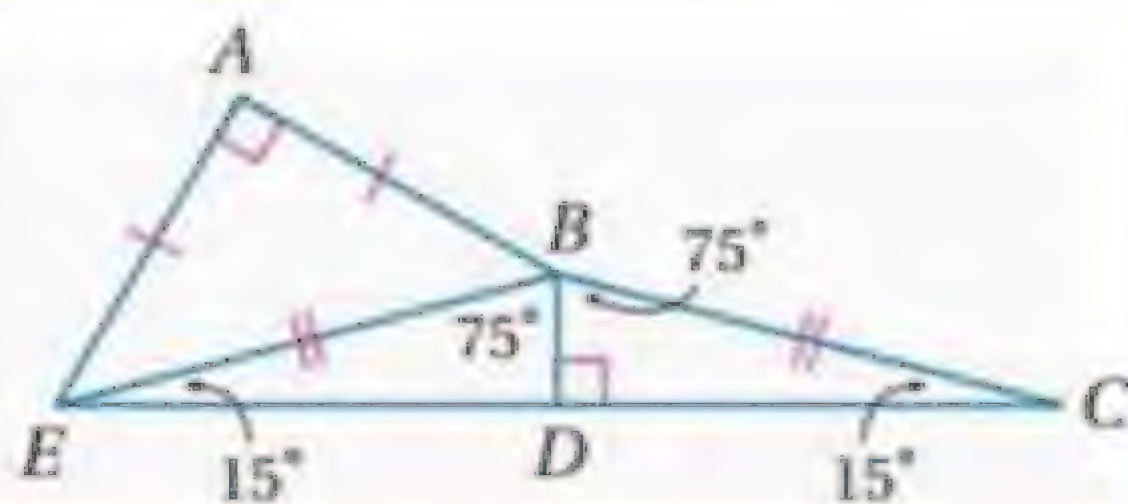


(34) **فن تشكيلي:** صنف كلاً من المثلثات المرقمة في الشكل وفق زواياه ثم وفق أضلاعه. استعمل المثلث القائم الزاوية لتصنيف الزوايا، والمسطرة لقياس الأضلاع.

الحل

- 1D: حاد الزوايا متطابق الضلعين  
2D: قائم الزاوية مختلف الأضلاع  
3D: منفرج الزاوية مختلف الأضلاع  
4D: حاد الزوايا متطابق الأضلاع  
5D: منفرج الزاوية مختلف الأضلاع

صنف كلاً من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:



$\triangle BDC$  (37)

قائم الزاوية ومختلف الأضلاع

$\triangle EBC$  (36)

منفرج الزاوية لأن  $\angle EBC = 150^\circ$   
ومتطابق الضلعين  $BE = BC$

$\triangle ABE$  (35)

قائم الزاوية لأن  $\angle BAE = 90^\circ$   
ومتطابق الضلعين لأن  $AB = AE$

الحل



هندسة إحداثية، أوجد أطوال أضلاع  $\triangle XYZ$  في كل من السؤالين الآتيين، وصنّفه وفق أضلاعه:

(38)  $X(-5, 9), Y(2, 1), Z(-8, 3)$



$X(-5, 9), Y(2, 1)$

$$d_{(XY)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-5))^2 + (1 - 9)^2}$$

$$\sqrt{49 + 64} = \sqrt{113}$$

$Y(2, 1), Z(-8, 3)$

$$d_{(YZ)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-8 - 2)^2 + (3 - 1)^2}$$

$$\sqrt{100 + 4} = \sqrt{104}$$

$X(-5, 9), Z(-8, 3)$

$$d_{(XZ)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-8 - (-5))^2 + (3 - 9)^2}$$

$$\sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

المثلث  $XYZ$  مختلف الأضلاع لأن جميع أطواله غير متساوية.



$$X(7, 6), Y(5, 1), Z(9, 1) \quad (39)$$



$$X(7, 6), Y(5, 1)$$

$$d_{(X,Y)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 7)^2 + (1 - 6)^2}$$

$$\sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$Y(5, 1), Z(9, 1)$$

$$d_{(Y,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(9 - 5)^2 + (1 - 1)^2}$$

$$\sqrt{16 + 0} = \sqrt{4}$$

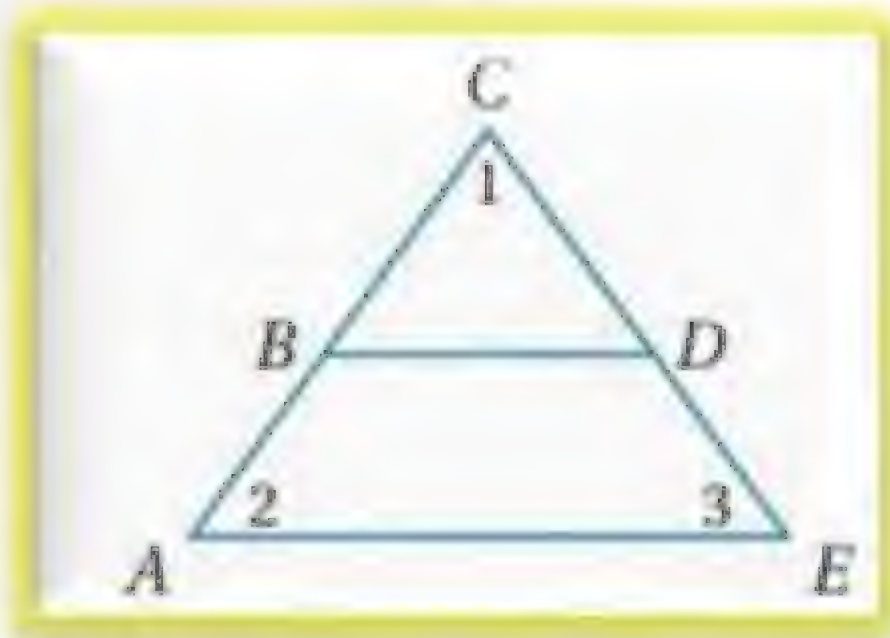
$$X(7, 6), Z(9, 1)$$

$$d_{(X,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(9 - 7)^2 + (1 - 6)^2}$$

$$\sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

المثلث  $XYZ$  متطابق الضلعين لأن  $\overline{XZ} = \overline{XY}$





**40) برهان:** اكتب برهاناً ذا عمودين تبين فيه أن  $\triangle BCD$  متطابق الزوايا، إذا كان  $\triangle ACE$  متطابق الزوايا، وكانت  $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ .



- 1)  $\triangle ACE$  متطابق الزوايا و  $BD \parallel AE$  (معطيات)
- 2)  $\angle 3 \cong \angle 2 \cong \angle 1$  (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)
- 3)  $\angle 2 \cong \angle CBD$  و  $\angle 3 \cong \angle CDB$  (مسلمة الزاويتين المتناظرتين)
- 4)  $\angle 1 \cong \angle CBD \cong \angle CDB$
- 5)  $\triangle BCD$  متطابق الزوايا (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)



**جبر،** أوجد قيمة  $x$  وأطوال أضلاع المثلث في كل مما يأتي:

(41)  $\triangle FGH$  مثلث متطابق الأضلاع فيه:  $FG = 3x - 10$ ,  $GH = 2x + 5$ ,  $HF = x + 20$ .

**$\triangle FGH$  متطابق الأضلاع أي جميع أطواله متساوية**



$$HF = GH$$

$$x + 20 = 2x + 5$$

$$x = 15$$

$$HF = x + 20 = 15 + 20 = 35$$

$$GH = 2x + 5 = 2 \times 15 + 5 = 35$$

$$FG = 3x - 10 = 3 \times 15 - 10 = 35$$

(42)  $\triangle RST$  متطابق الأضلاع، ويزيد  $RS$  ثلاثة على أربعة أمثال  $x$ ، ويزيد  $ST$  سبعة على مثلي  $x$ ، ويزيد  $TR$  واحدًا على خمسة أمثال  $x$ .

**$\triangle RST$  متطابق الأضلاع أي جميع أطواله متساوية**

$$RS = 4x + 3, ST = 2x + 7, TR = 5x + 1, RS = ST$$

$$4x + 3 = 2x + 7$$

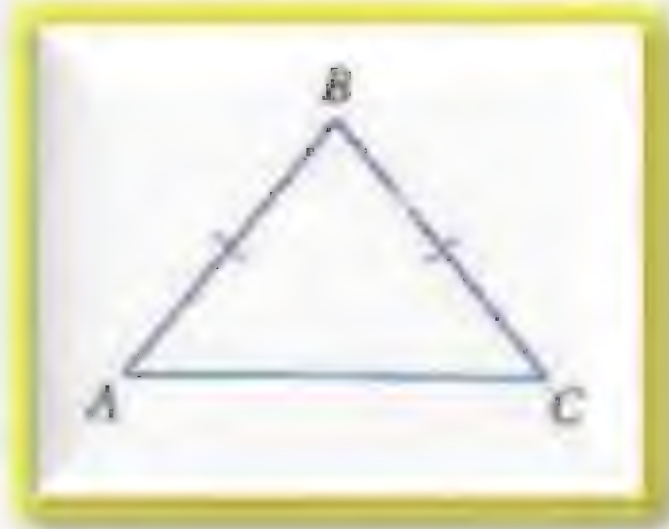
$$x = 2$$


$$RS = 4x + 3 = 4 \times 2 + 3 = 11$$

$$ST = 2x + 7 = 2 \times 2 + 7 = 11$$

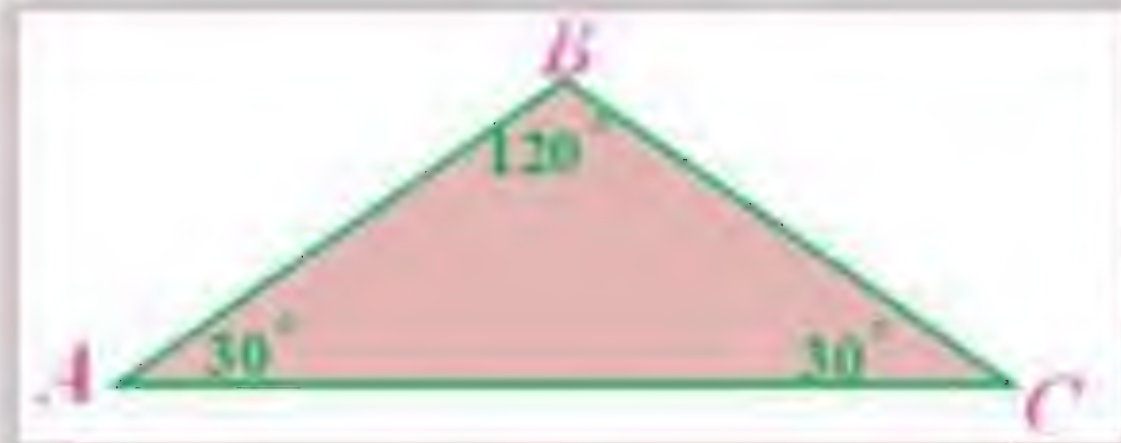
$$TR = 5x + 1 = 5 \times 2 + 1 = 11$$



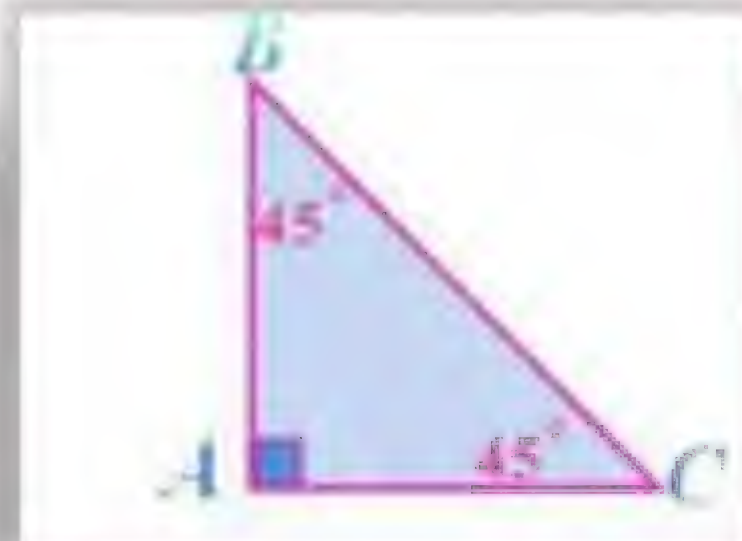


(43)  **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سنكتشف العلاقة بين قياسي الزاويتين اللتين تقابلان ضلعين متطابقين في مثلث، ومجموع زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

(a) هندسيًا، ارسم أربعة مثلثات متطابقة الضلعين، منها مثلث حادّ الزوايا ومثلث قائم الزاوية، ومثلث منفرج الزاوية. وفي كل من هذه المثلثات سمّ الرأسين المقابلين للضلعين المتطابقين  $A$ ،  $C$ ، وسمّ الرأس الثالث  $B$ . ثم قس زوايا كل مثلث، واكتب على كل زاوية قياسها.



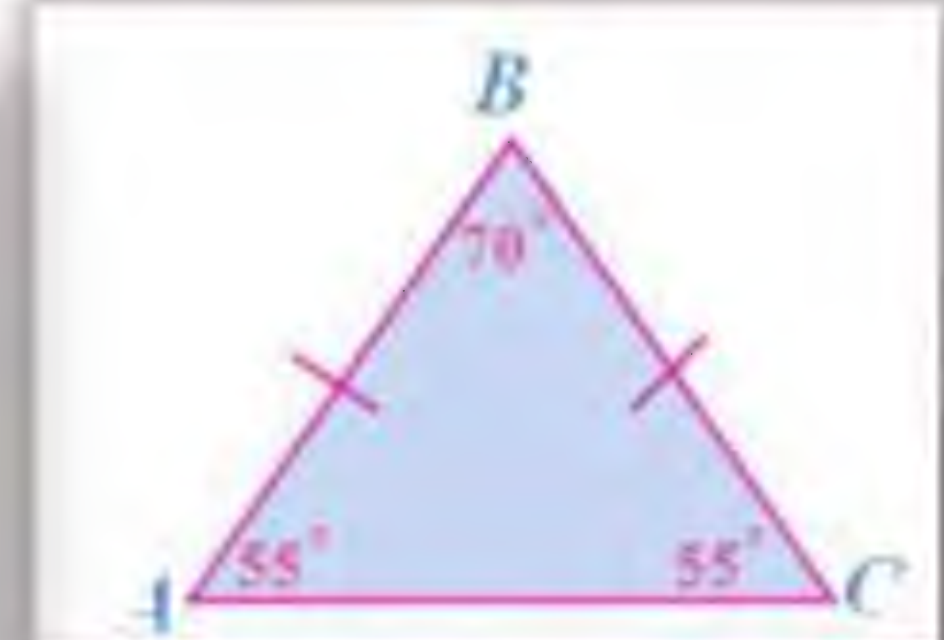
**مثلث منفرج الزاوية**



**مثلث قائم الزاوية**



**مثلث حادّ الزوايا**



**مثلث متطابق الأضلاع**



(b) جدولياً، رتب قياسات الزوايا في جدول، وضمه عموداً تكتب فيه مجموع قياسات هذه الزوايا.



مجموع قياسات الزوايا	$m \angle B$	$m \angle C$	$m \angle A$
180	70	55	55
180	44	68	68
180	90	45	45
180	120	30	30

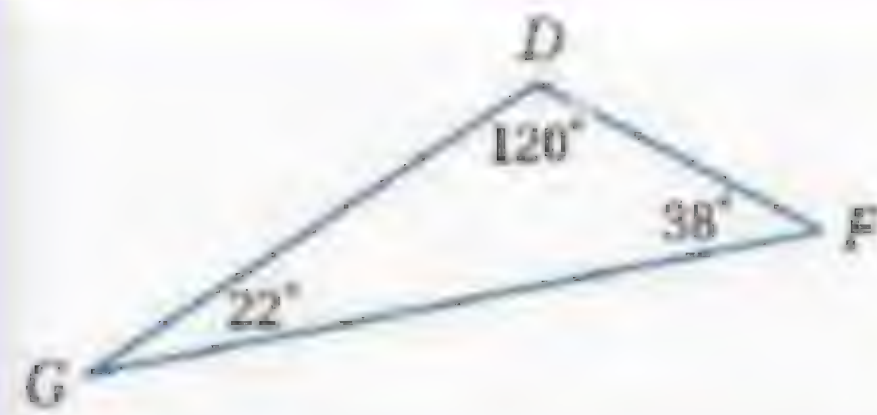
(c) تخلياً، خمن العلاقة بين قياسي الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين، ثم خمن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

**الزاويتان المقابلتان للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان،  
ومجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي 180**

(d) جبرياً، إذا كان قياس إحدى الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين هو  $x$ ، فاكتب عبارتين جبريتين تمثلان قياسي الزاويتين الأخرين، وفسر إجابتك.

**إذا كان للزاويتين المقابلتين للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين  
القياس نفسه وكان قياس أحدهما  $x$ ، فإن قياس الأخرى يساوي  $x$   
وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي 180 فإن  
قياس الزاوية الثالثة يساوي  $180 - 2x$**





(44) **اكتشف الخطأ.** تقول ليلى: إن  $\triangle DFG$  منفرج الزاوية، لكن نوال لا توافقها الرأي وتقول: إن عدد الزوايا الحادة في المثلث أكثر من عدد الزوايا المنفرجة؛ لذا فإن المثلث حاد الزوايا. أيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

الحل

ليلى إجابتها صحيحة، في أي مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل لذا فبحسب كلام نوال فإن جميع المثلثات تصنف على أنها حادة الزوايا، وهذا غير صحيح، حيث تصنف المثلثات وفقا للزاوية الثالثة فإذا كانت الزاوية الثالثة حادة، فالمثلث حاد الزوايا وإذا كانت منفرجة، فالمثلث منفرج الزاوية.

**تبرير.** قرر ما إذا كانت الجملة في كل مما يأتي صحيحة أحيانا أو صحيحة دائما أو غير صحيحة أبدا. ووضح إجابتك.

(45) المثلث المتطابق الزوايا هو مثلث قائم الزاوية أيضا.

الحل

غير صحيحة أبدا، جميع المثلثات المتطابقة الزوايا فيها ثلاثة زوايا قياس كل منها 60° ولذلك فبها لا تحتوى زاوية قياسها 90° فلا يمكن أن تكون قائمة الزاوية.



(46) المثلث المتطابق الأضلاع هو مثلث متطابق الضلعين أيضا.

الحل

**صحيحة دائما، المثلث المتطابق الاضلاع فيه ثلاثة اضلاع لها الطول نفسه والمثلث المتطابق الضلعين فيه ضلعان على الاقل لهما الطول نفسه ولذا فان جميع المثلثات المتطابقة الاضلاع تكون متطابقة الضلعين أيضا**

(47) **تحديد**، إذا كان طول ضلعين من أضلاع مثلث متطابق الأضلاع  $5x + 3$  وحدات،  $7x - 5$  وحدات، فما محيطه؟ فسر إجابتك.

الحل

**بما أن المثلث متطابق الأضلاع فان أطوال أضلاعه متساوية ويكون محيط المثلث المتطابق الاضلاع هو مجموع أطوال أضلاعه أو ثلاثة أمثال طول احد أضلاعه إذن**  
**محيط المثلث =  $3 \times 23 = 69$**

$$7x - 5 = 5x + 3$$

$$x = 4$$

$$7x - 5 = 7 \times 4 - 5 = 23$$

(48) **اكتب**، فسر لماذا يُعد تصنيف المثلث المتطابق الزوايا أنه مثلث حاد متطابق الزوايا، تصنيفاً غير ضروري؟

الحل

**في المثلث الحاد الزوايا ثلاثة زوايا حادة والمثلث المتطابق الزوايا فيه ثلاث زوايا قياس كل منها 60 وبما أن الزوايا التي قياسها 60 هي زوايا حادة فان جميع المثلثات المتطابقة الزوايا هي مثلثات حادة الزوايا.**



### Angles of Triangles



**لماذا؟**

يرعى أحد معاهد التقنية مسابقة سنوية، حيث يصمم الطلاب إنساناً آلياً يؤدي مهام مختلفة. وقد تمت برمجة هذا الإنسان الآلي في أحد الاختبارات ليتحرك في مسار على صورة مثلث. على أن يكون مجموع قياسات الزوايا التي ينعطف بها الإنسان الآلي عند نقاط الارتكاز الثلاث ثابتاً دائماً.

**فيما سبق:**

درست تصنيف المثلثات وفقاً لقياسات أضلاعها وزواياها.

**والآن:**

- أطبق نظرية مجموع زوايا المثلث.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.

**المفردات:**

المستقيم المساعد

auxiliary line

الزاوية الخارجية

exterior angle

الزاويتان الداخليتان

البعيدتان

remote interior angles

البرهان التسلسلي

flow proof

النتيجة

corollary

**نظرية مجموع زوايا المثلث:** تُعبر نظرية مجموع زوايا المثلث عن العلاقة بين الزوايا الداخلية لأي مثلث.

أضف إلى

مطوبتك

### نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

### نظرية 3.1

التعبير اللفظي: مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي  $180^\circ$ .

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$$

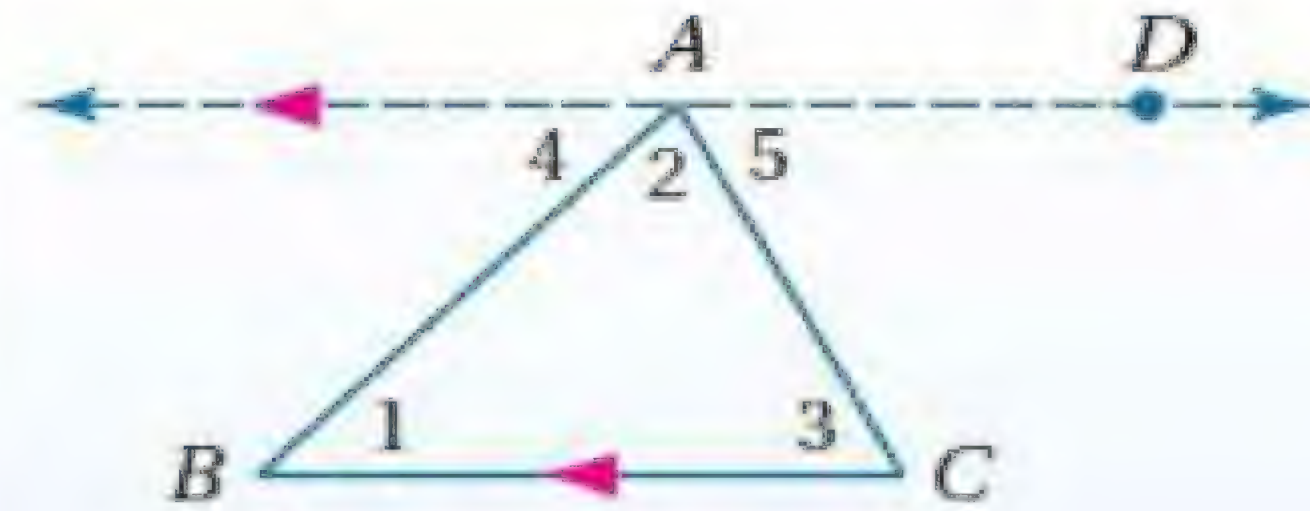
مثال:





برهان

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث



المعطيات:  $\triangle ABC$

المطلوب:  $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

البرهان: ارسم من النقطة A المستقيم  $\overleftrightarrow{AD}$  موازيًا لـ  $\overline{BC}$ .

المبررات	العبارات
(1) مُعطى	(1) $\triangle ABC$
(2) تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم	(2) $\angle 4, \angle BAD$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.
(3) الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان	(3) $\angle 4, \angle BAD$ متكاملتان.
(4) تعريف الزاويتين المتكاملتين	(4) $m\angle 4 + m\angle BAD = 180^\circ$
(5) مسلّمة جمع الزوايا	(5) $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$
(6) بالتعويض	(6) $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180^\circ$
(7) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا	(7) $\angle 4 \cong \angle 1, \angle 5 \cong \angle 3$
(8) تعريف تطابق الزوايا	(8) $m\angle 4 = m\angle 1, m\angle 5 = m\angle 3$
(9) بالتعويض	(9) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

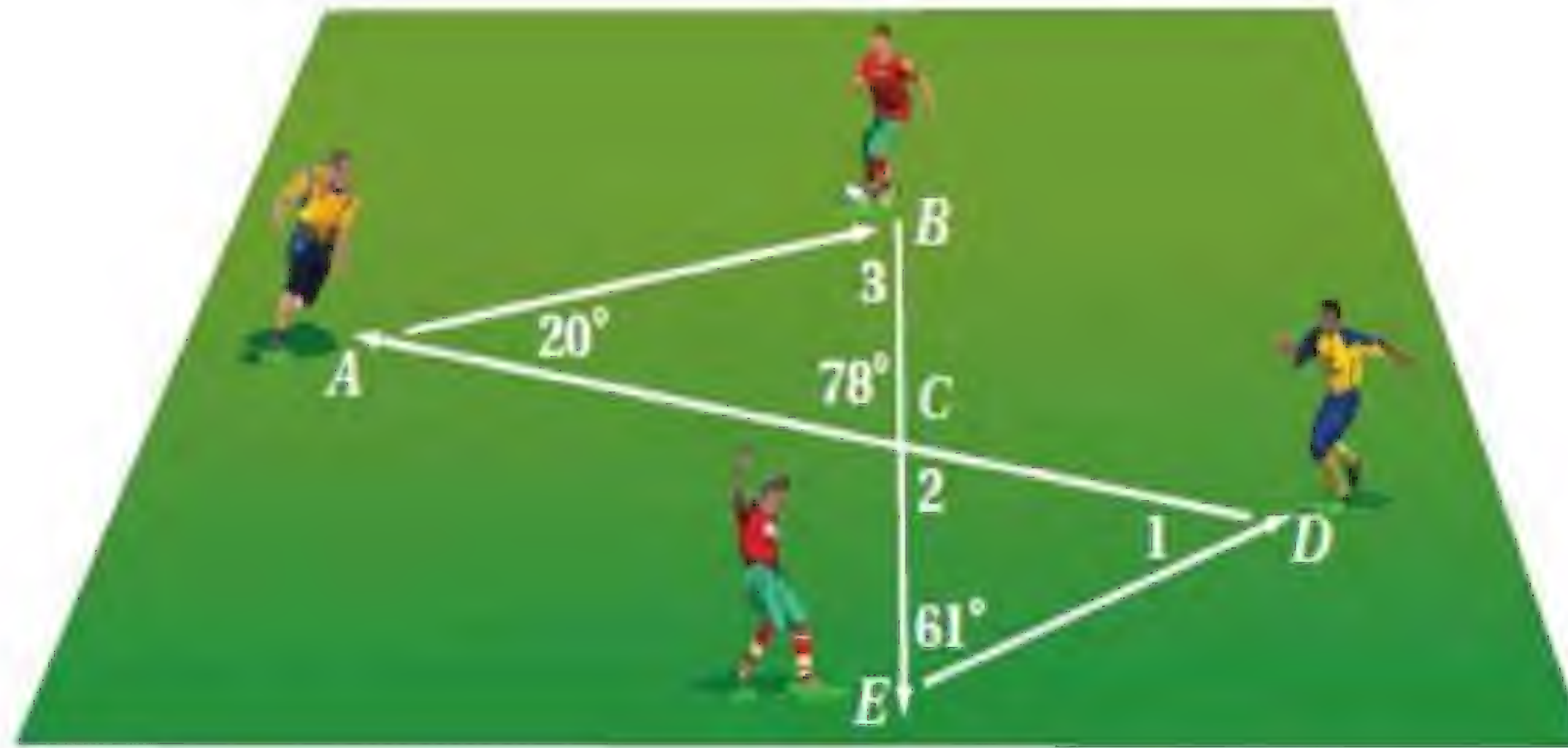


# ٢-٣ زوايا المثلث Angles of Triangles

استعمال نظرية مجموع زوايا المثلث

مثال 1 من واقع الحياة

**كرة قدم:** يبين الشكل مسار الكرة في تدريب على التمريرات نفّذها أربعة لاعبين.



الربط مع الحياة

يتمج تمرين "مرر وتحرك" في لعبة كرة القدم بين عدة مظاهر أساسية لعملية التمرير. حيث تكون جميع التمريرات في التدريب على صورة مثلثات، وهذا هو الأساس في جميع حركات الكرة، وبالإضافة إلى ذلك على اللاعب أن يتحرك فوراً بعد تمريره الكرة.

افهم:

تفحص المعلومات المعطاة في الشكل أعلاه، تعرف قياسي زاويتين من زوايا أحد المثلثين وقياس زاوية واحدة من زوايا المثلث الآخر. وتعرف كذلك أن  $\angle 2$ ,  $\angle ACB$ , زاويتان متقابلتان بالرأس.

الفصل الثالث

خطط:

أوجد  $m\angle 3$  باستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث مستعملاً قياسي الزاويتين الأخرين في  $\triangle ABC$ . ثم استعمل نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس لإيجاد  $m\angle 2$ . وعندها يمكنك إيجاد  $\angle 1$  في  $\triangle CDE$ .



نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180^\circ$$

حل:

بالتعويض

$$m\angle 3 + 20^\circ + 78^\circ = 180^\circ$$

بالتبسيط

$$m\angle 3 + 98^\circ = 180^\circ$$

اطرح 98 من الطرفين

$$m\angle 3 = 82^\circ$$

$\angle ACB$ ,  $\angle 2$  متطابقتان؛ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس؛ لذا فإن  $m\angle 2 = 78^\circ$ .  
استعمل  $m\angle 2$  و  $\angle CED$  في  $\triangle CDE$  لإيجاد  $m\angle 1$ .

نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180^\circ$$

بالتعويض

$$m\angle 1 + 78^\circ + 61^\circ = 180^\circ$$

بالتبسيط

$$m\angle 1 + 139^\circ = 180^\circ$$

اطرح 139 من الطرفين

$$m\angle 1 = 41^\circ$$

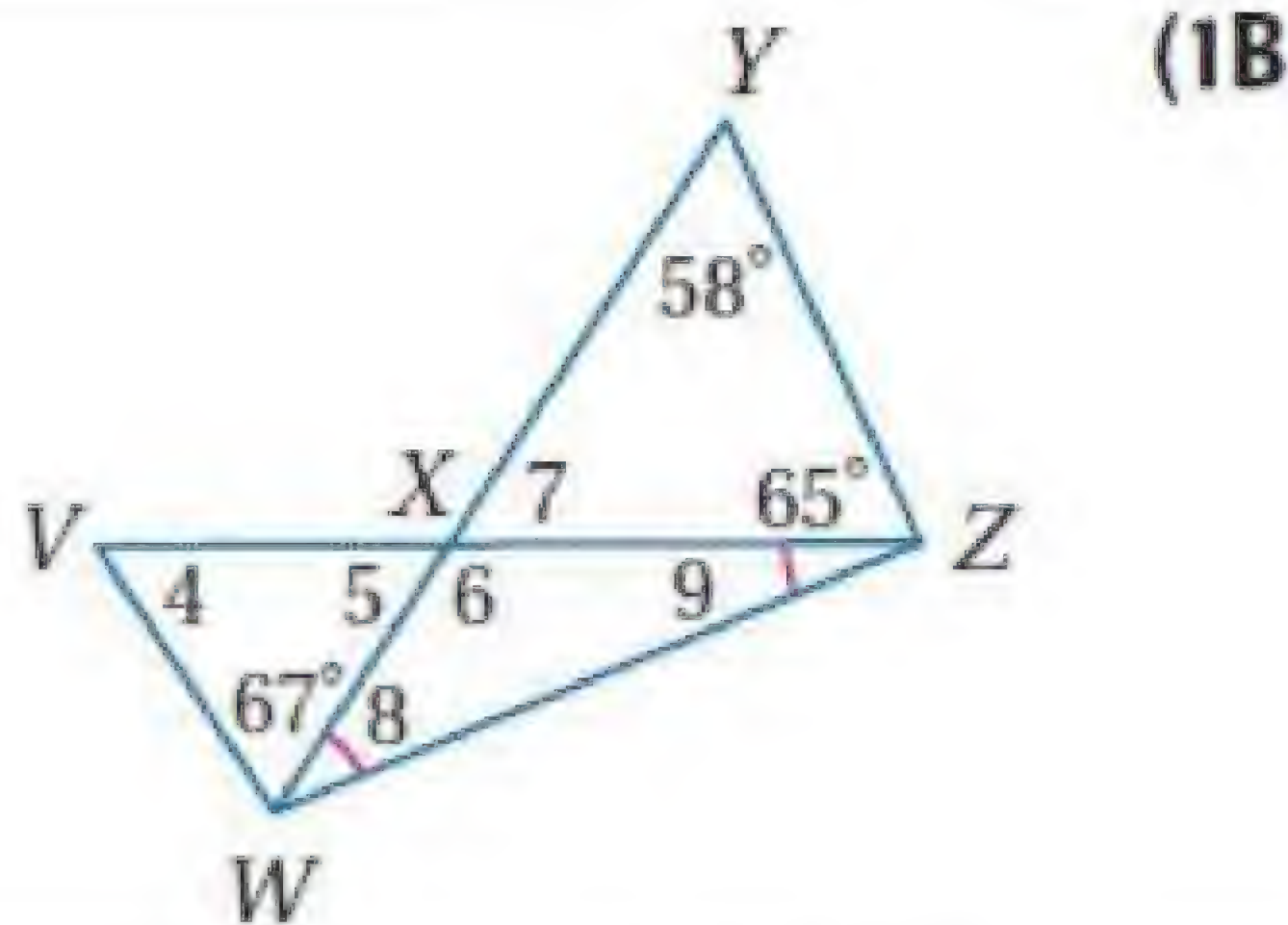
**تحقق:** يجب أن يكون مجموع قياسات زوايا كلٍّ من  $\triangle ABC$ ,  $\triangle CDE$  مساوياً لـ 180.

✓  $\triangle ABC: m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82^\circ + 20^\circ + 78^\circ = 180^\circ$

✓  $\triangle CDE: m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41^\circ + 78^\circ + 61^\circ = 180^\circ$

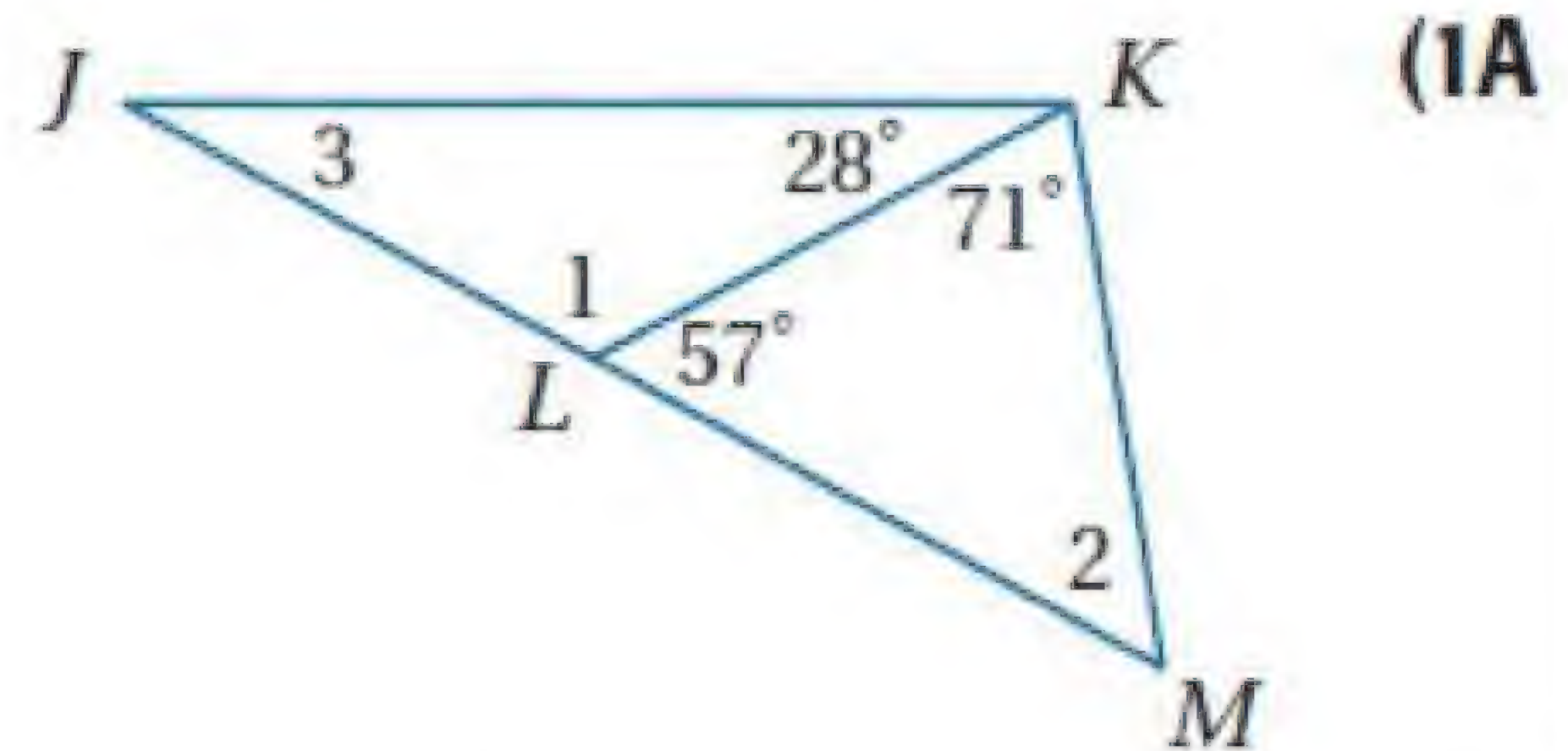


أوجد قياسات الزوايا المرقمة فيما يأتي:



$$m\angle 4 = 56^\circ, m\angle 5 = 57^\circ, m\angle 6 = 123^\circ, (1B)$$

$$m\angle 7 = 57^\circ, m\angle 8 = m\angle 9 = 28.5^\circ$$



$$m\angle 1 = 123^\circ, m\angle 2 = 52^\circ, m\angle 3 = 29^\circ$$



## ٢-٣ زوايا المثلث Angles of Triangles

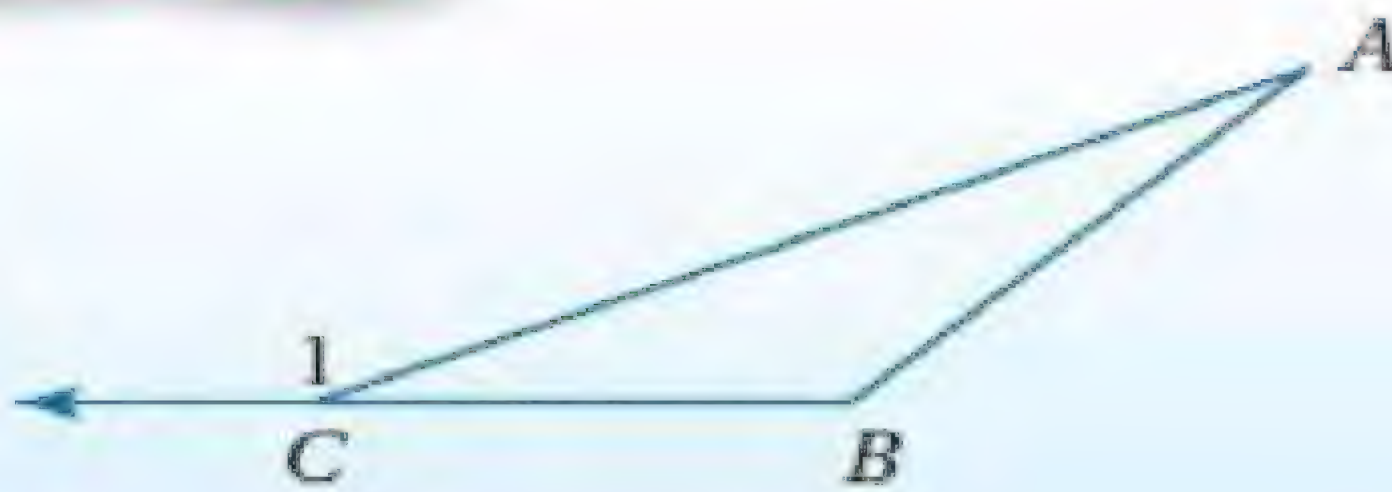
**نظرية الزاوية الخارجية للمثلث:** بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث يمكن أن يكون للمثلث **زوايا خارجية** تتشكل كل منها من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع مجاور له. ولكل زاوية خارجية **زاويتان داخليتان بعيدتان** غير مجاورتين لها.

**∠4** زاوية خارجية لـ  $\triangle ABC$ ،  
وزاويتاها الداخليتان البعيدتان  
هما **∠1**، **∠3**.



أضف إلى

مطويتك



### نظرية الزاوية الخارجية

### نظرية 3.2

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال:  $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

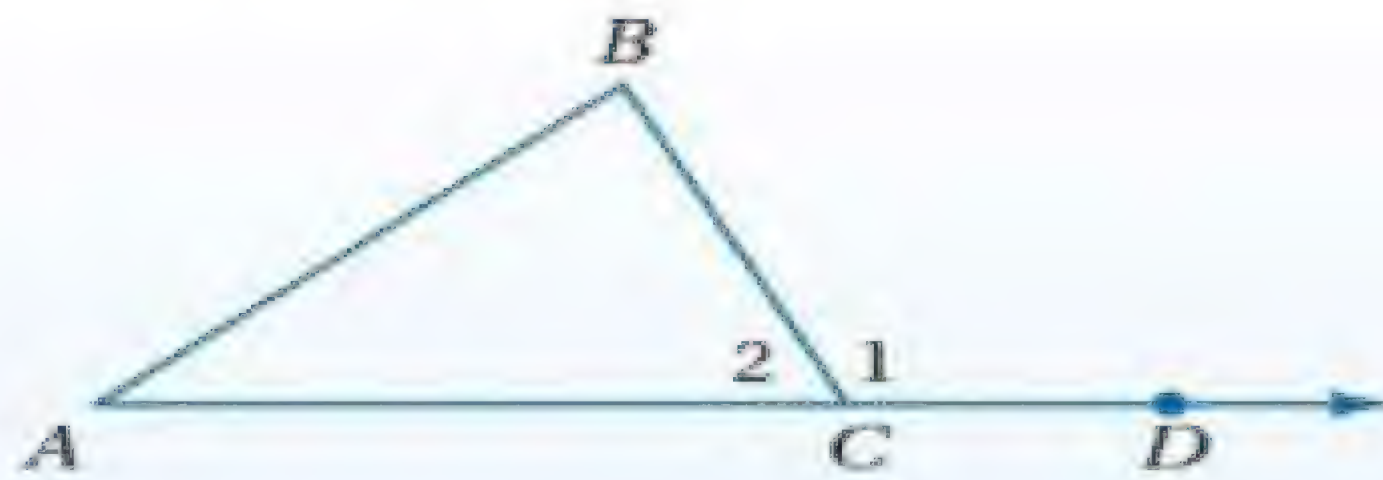


## ٢-٣ زوايا المثلث Angles of Triangles

تستعمل في البرهان التسلسلي عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبين التسلسل المنطقي لهذه العبارات. ويكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرر العبارة المكتوبة داخله، ويمكنك برهنة نظرية الزاوية الخارجية باستعمال البرهان التسلسلي كما يأتي.

### البرهان

### نظرية الزاوية الخارجية



المعطيات:  $\triangle ABC$

المطلوب:  $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$

برهان تسلسلي:

$\angle 1, \angle 2$  زاويتان متجاورتان على مستقيم  
تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم

$\angle 1, \angle 2$  متكاملتان  
الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180$   
تعريف الزاويتين المتكاملتين

$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180$   
نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 1 + m\angle 2$

بالتعويض

$m\angle A + m\angle B = m\angle 1$   
خاصية الطرح في المعادلات

$\triangle ABC$   
معطى



## ٢-٣ زوايا المثلث Angles of Triangles

يمكن إيجاد قياسات الزوايا المجهولة باستعمال نظرية الزاوية الخارجية.

استعمال نظرية الزاوية الخارجية

مثال 2 مواقف الحياة

**اللياقة البدنية:** أوجد قياس  $\angle JKL$  في الوضع الذي يظهر فيه المتدرب في الصورة:

نظرية الزاوية الخارجية

$$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$$

بالتعويض

$$x + 50 = 2x - 15$$

اطرح  $x$  من الطرفين

$$50 = x - 15$$

أضف 15 إلى الطرفين

$$65 = x$$

$$\text{لذا فإن } m\angle JKL = (2(65) - 15)^\circ = 115^\circ$$

الربط مع الحياة

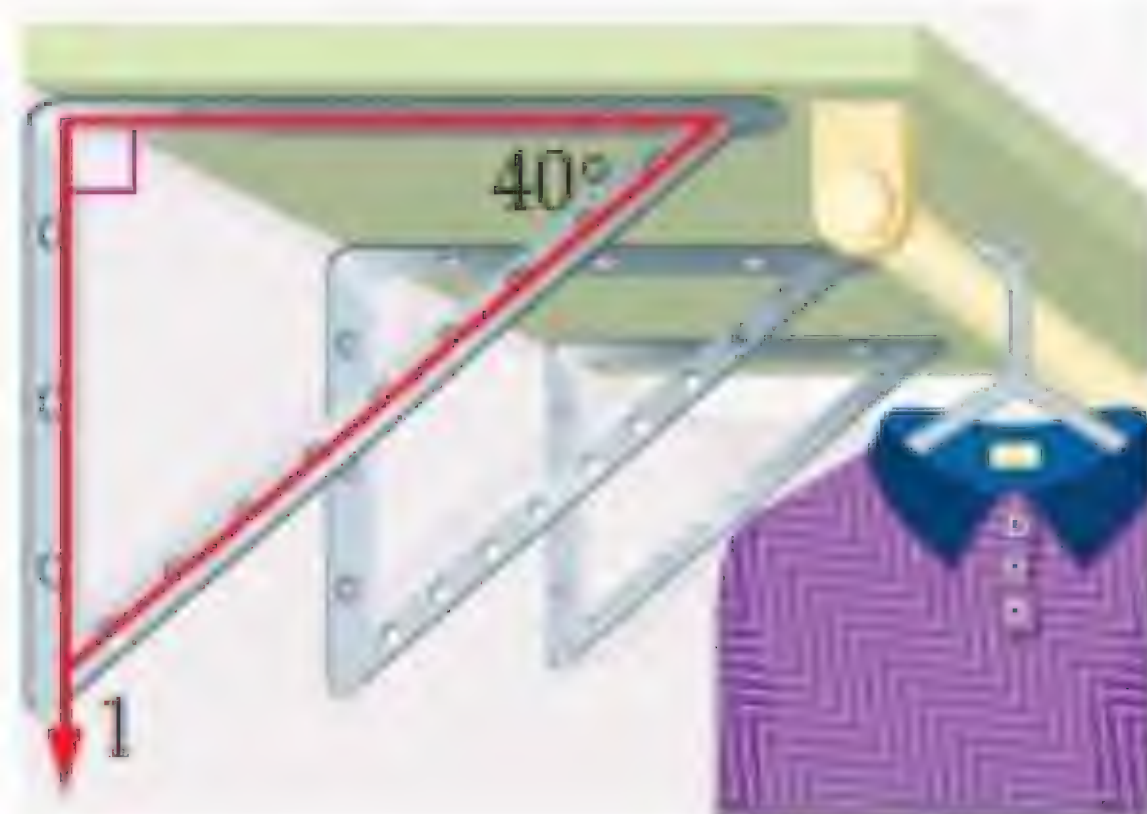
**المدرّب الخاص** يعلم مدربي اللياقة البدنية المتدربين طرائق متنوعة ويحفزونهم على أدائها. من المهم أن يحمل هؤلاء المدربون شهادات تخصص في مجال عملهم.





(2) **تنظيم خزانة الملابس:** تثبت لطيفة جسر الرفوف على جدار

خزانتها. ما قياس  $\angle 1$  التي يصنعها الجسر مع جدار الخزانة؟



**نظرية الزاوية الخارجية للمثلث**  $M(\angle 1) = 90^\circ + 40^\circ$

$$M(\angle 1) = 130^\circ$$



# ٢-٣ زوايا المثلث Angles of Triangles

## نتيجتان

### مجموع زوايا المثلث

**3.1** الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان.  
مثال: إذا كانت  $\angle C$  قائمة، فإن  $\angle A$ ،  $\angle B$  زاويتان متتامتان.



**3.2** يوجد زاوية قائمة واحدة أو منفرجة واحدة على الأكثر في أي مثلث.

مثال: إذا كانت  $\angle L$  قائمة فإن  $\angle J$ ،  $\angle K$  زاويتان حادتان.



## إرشادات للدراسة

### التحقق من المعقولة

عندما تجد قياسات زوايا

مثلث، تأكد دائماً أن

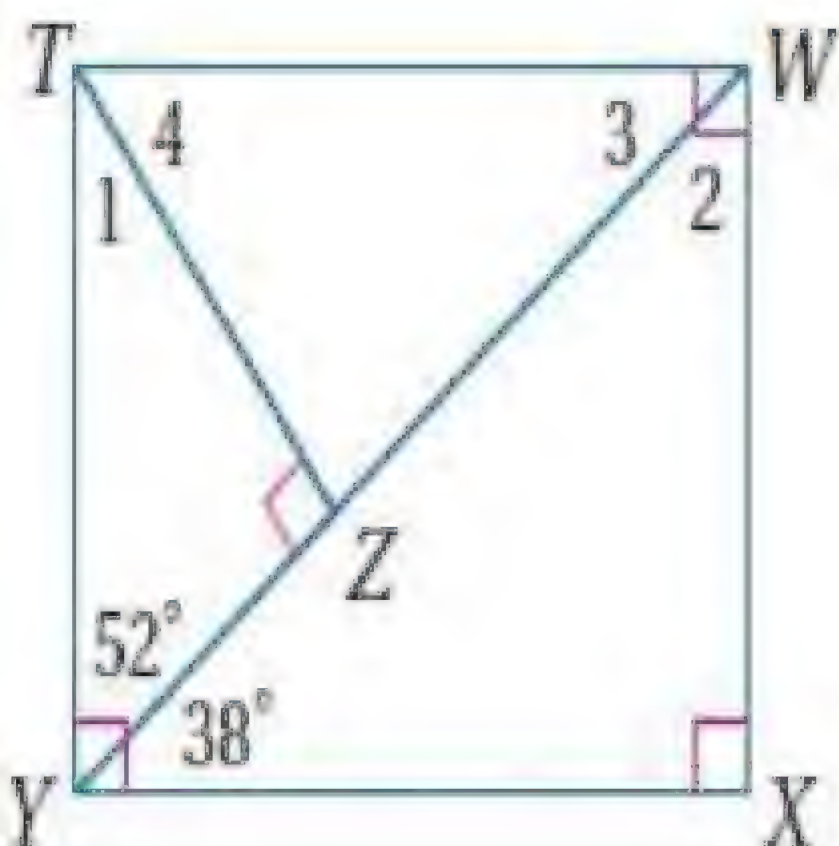
مجموع هذه القياسات

يساوي  $180^\circ$ .

## مثال 3

### إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في الشكل المجاور.



زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية

$$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90^\circ$$

بالتعويض

$$m\angle 1 + 52^\circ = 90^\circ$$

اطرح 52 من الطرفين

$$m\angle 1 = 38^\circ$$



**∠2 (3A)**

نتيجة  $m(\angle 2) + 38^\circ = 90^\circ$

$m(\angle 2) = 90^\circ - 38^\circ$ 
 $m(\angle 2) = 52^\circ$

**∠3 (3B)**

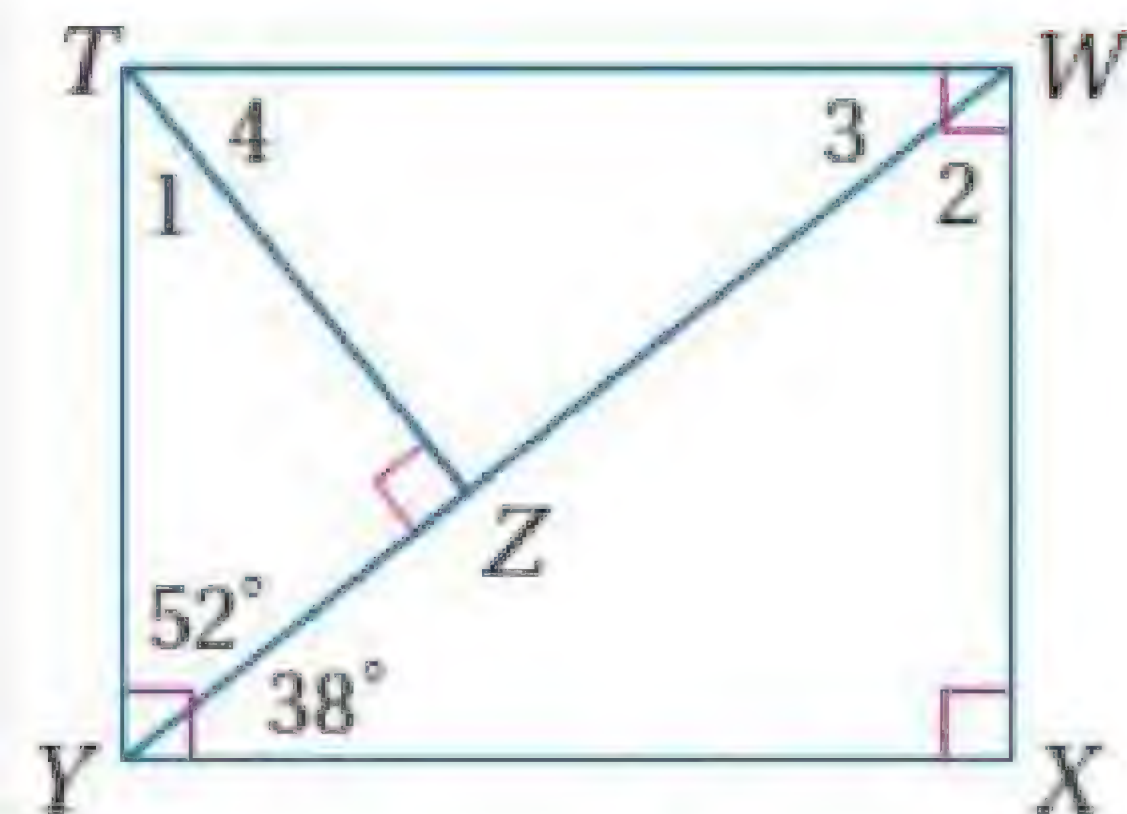
$m(\angle 3) = 38^\circ$

بالتبادل

**∠4 (3C)**

$m(\angle 4) + m(\angle 3) = 90^\circ$ 
 $m(\angle 4) = 90^\circ - 38^\circ$

$m(\angle 4) = 52^\circ$

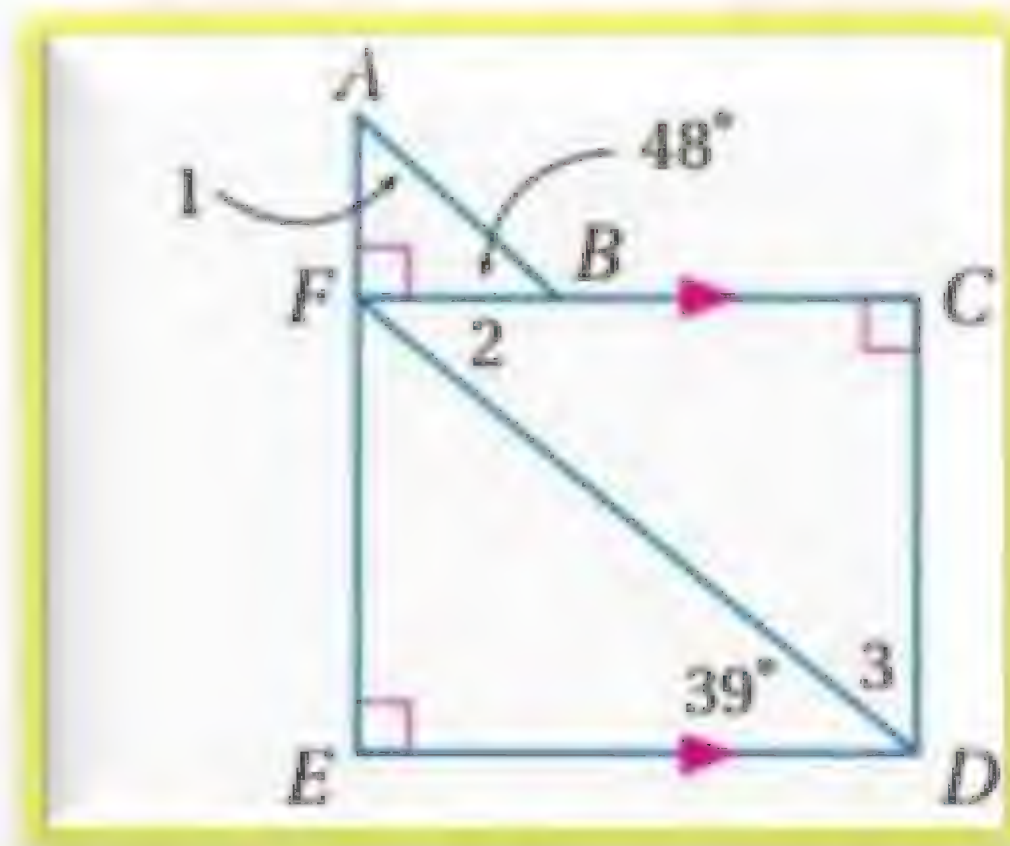




لا تأكد

المثال ١

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين :



الحل

$$\angle 1 = 180 - (90 + 48)$$

$$\angle 1 = 42$$

$$\angle 2 = 39 \quad \text{نظرية الزاويتان المتبادلتان داخليا}$$

$$\angle 3 = 90 - 39$$

$$\angle 3 = 51$$

بما أن زوايا المثلث الداخلة = 180 إذن:

$$\angle 1 = 180 - (63 + 59)$$

$$\angle 1 = 58$$



## المثال ٢

كراسي الشاطئ. تشكل دعامة المقعد مع بقية الهيكل مثلثًا كما هو موضح في الشكل المجاور. أوجد كلاً من القياسات الآتية:



$$m\angle 4 \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\angle 4 &= 180 - 53 \\ \angle 4 &= 127\end{aligned}$$

$$m\angle 3 \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\angle 3 &= 180 + \angle 3 \\ \angle 3 &= 180 + 49 \\ \angle 3 &= 131\end{aligned}$$

$$m\angle 2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\angle 2 + 53 &= 102 \\ \angle 2 &= 102 - 53 \\ \angle 2 &= 49\end{aligned}$$

نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$$m\angle 1 \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\angle 1 &= 180 - 102 \\ \angle 1 &= 78\end{aligned}$$

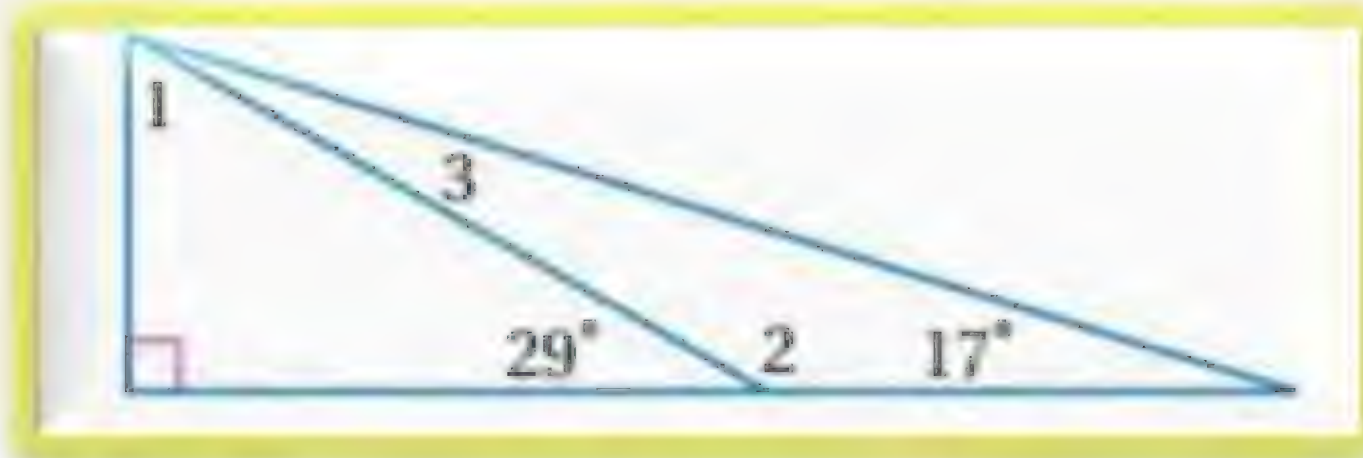
نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180





معتمدًا على الشكل المجاور، أوجد القياسات التالية:

المثال ٣



$m\angle 1$  (7)

$$\angle 1 = 180 - (90 + 29)$$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180

$$\angle 1 = 61$$

$m\angle 3$  (8)

$$\angle 1 + \angle 3 = 180 - (90 + 17)$$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180

$$61 + \angle 3 = 73$$

$$\angle 3 = 12$$

$m\angle 2$  (9)

$$\angle 2 = 180 - (\angle 3 + 17)$$

$$\angle 2 = 180 - (12 + 17)$$

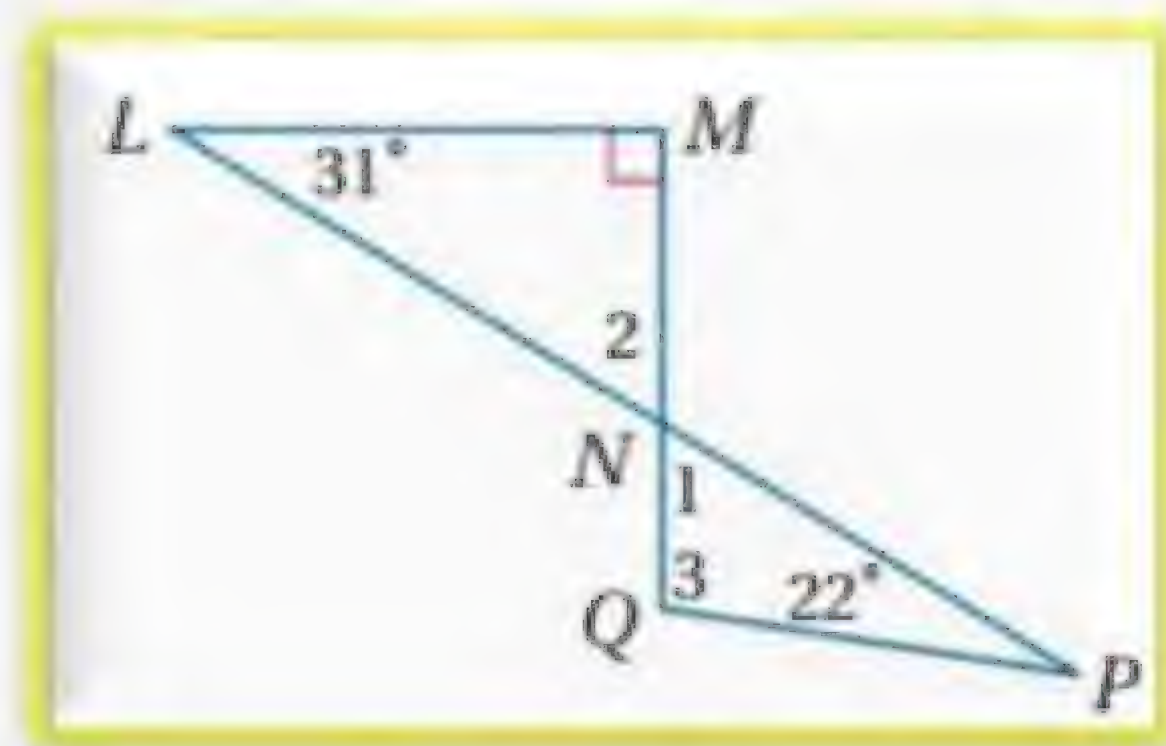
$$\angle 2 = 151$$





المثال ١

أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل من المرفقين الآتيين:



$$\angle 2 = 180 - (31 + 90)$$

$$\angle 2 = 59$$

$$\angle 2 = \angle 1 = 59$$

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

$$\angle 3 = 180 - (\angle 1 + 22)$$

$$\angle 3 = 180 - (59 + 22)$$

$$\angle 3 = 99$$

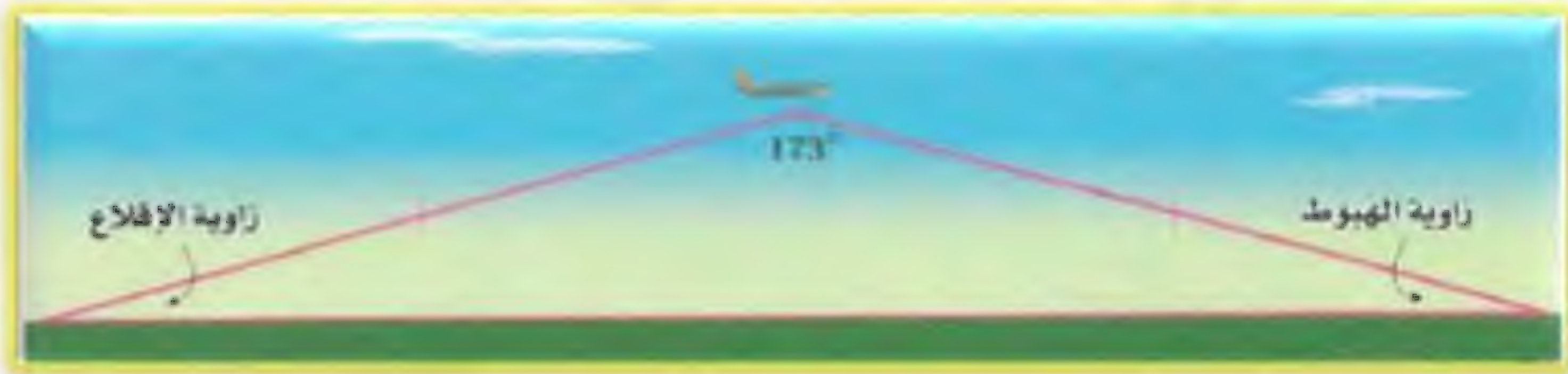
$$\angle 1 = 180 - (59 + 61)$$

$$\angle 1 = 60$$





(12) **طائرات**، يمكن تمثيل خط الطيران في رحلة ما باستعمال ضلعي مثلث كما في النموذج أدناه، علمًا بأن المسافة التي تقطعها الطائرة صعودًا تساوي المسافة التي تقطعها هبوطًا.



(a) صنف النموذج بحسب الأضلاع والزوايا.



**متطابق الضلعين، منفرج الزاوية**

(b) إذا كانت زاويتا الإقلاع والهبوط متطابقتين، فأوجد قياس كل منهما.

**بما أن زاوية الهبوط والإقلاع متطابقتين فإنهما متساويتان  
وبما أن مجموع زوايا المثلث = 180 إذن:**

$$7 = 180 - 173$$

$$3.5 = 2 \div 7$$

3.5

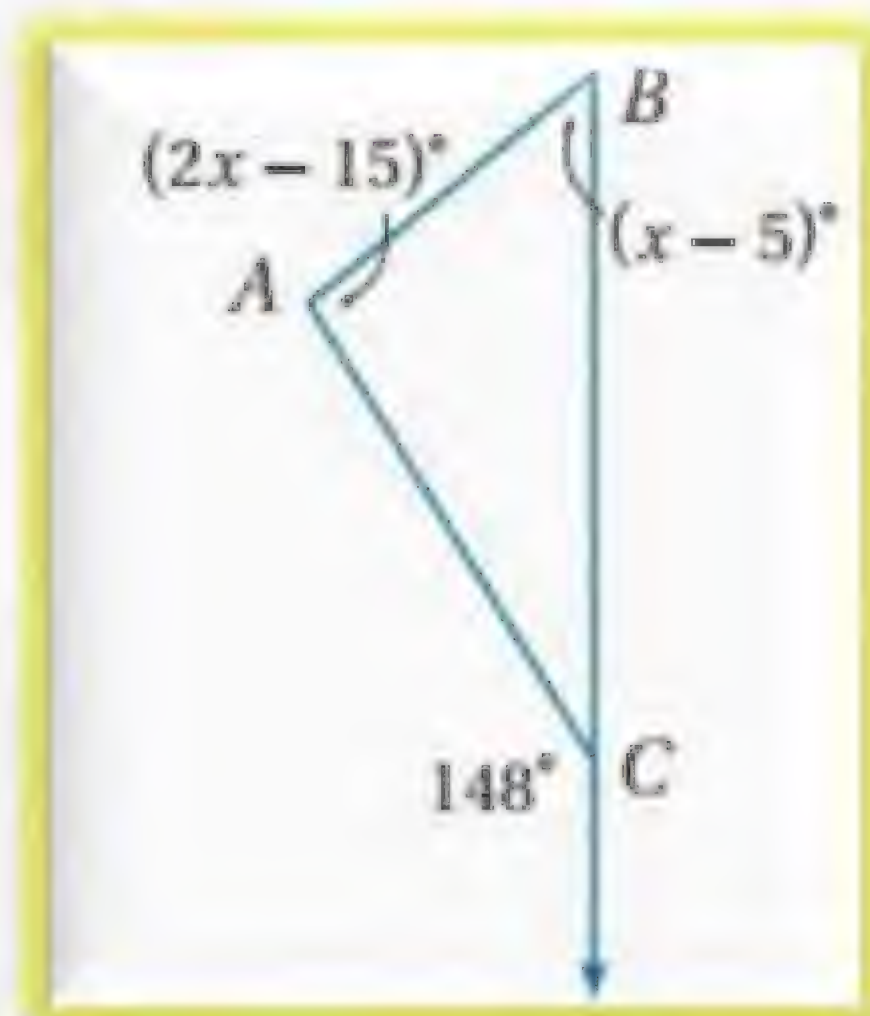
**زاوية الهبوط والإقلاع =**



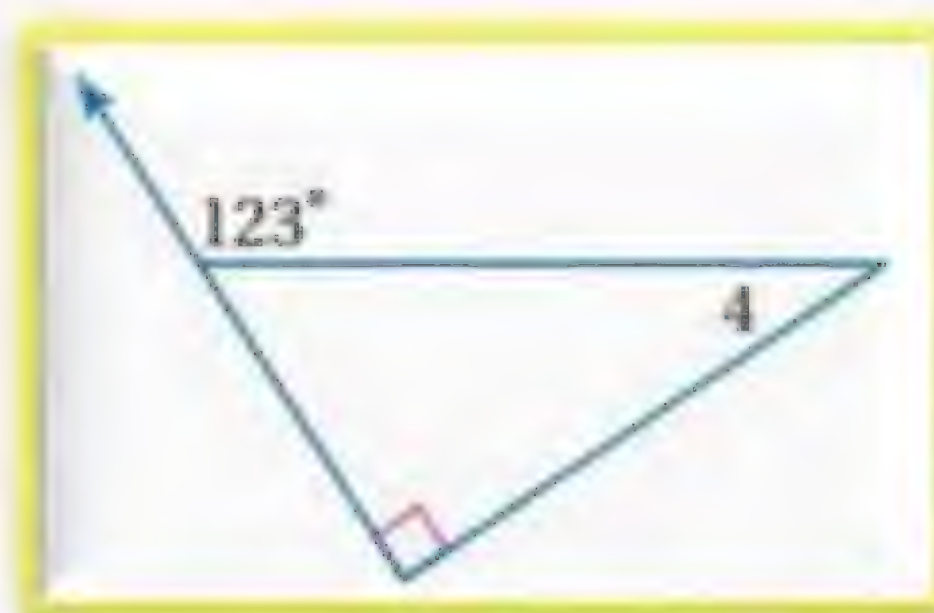
أوجد كلا من القياسات الآتية :

المثال ٢

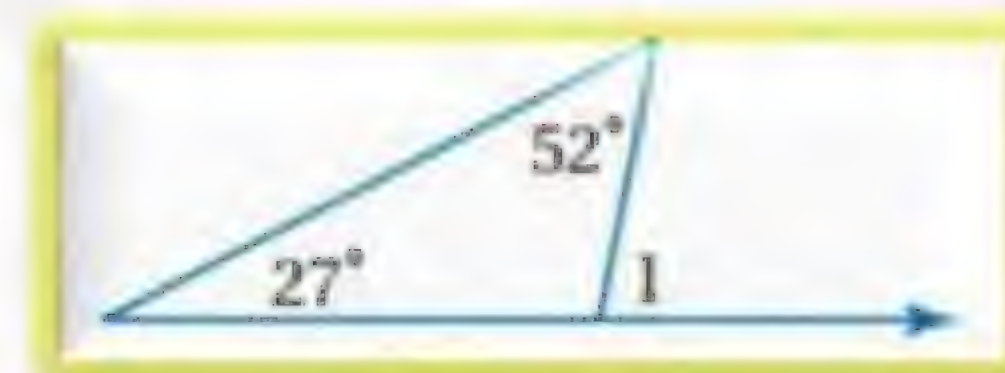
$m\angle ABC$  (15)



$m\angle 4$  (14)



$m\angle 1$  (13)



$$148 = (2X - 15) + (X - 5)$$

$$148 = 3X - 20$$

$$148 + 20 = 3X$$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

$$168 = 3X$$

$$X = 56$$

$$\angle ABC = X - 5 = 56 - 5 = 51$$

$$123 = \angle 4 + 90$$

نظرية الزاوية الخارجة  
عن المثلث

$$\angle 4 = 123 - 90 = 33$$

$$\angle 1 = 27 + 52 = 79$$

نظرية الزاوية الخارجة  
عن المثلث









(22) **مسألة**، استتبت مهندس زراعي زهور أقحوان في حوض على شكل مثلث متطابق الضلعين. إذا رغب المهندس في أن يكون قياس  $\angle A$  ثلاثة أمثال قياس كل من  $\angle B$ ،  $\angle C$ ، فما قياس كل زاوية في هذا المثلث؟

الحل

بجمع المعادلتين ١ و ٢

$$15\angle C = 540$$

$$\angle C = \frac{540}{15}$$

$$\angle C = 36^\circ$$

$$\angle B = 36^\circ$$

$$\angle A = 3\angle B = 3 \times 36 = 108^\circ$$

$$\angle A = 3\angle B, \angle A = 3\angle C$$

$$\angle A = 180 - (\angle B + \angle C)$$

مجموع زوايا المثلث الداخلة  $180^\circ$

$$3(\angle B) = 180 - (\angle B + \angle C)$$

$$3(\angle C) = 180 - (\angle B + \angle C)$$

$$3(\angle B) = 180 - \angle B - \angle C$$

$$4\angle B = 180 - \angle C$$

$$4\angle B + \angle C = 180 \rightarrow 1$$

$$3(\angle C) = 180 - \angle B - \angle C$$

$$4\angle C = 180 - \angle B$$

$$4\angle C + \angle B = 180 \quad \times -4$$

$$-4\angle B - 16\angle C = -720 \rightarrow 2$$



## براهين: برهن كل مما يلي مستعملا طريقة البرهان المنكورة:

(23) النتيجة 3.1 باستعمال البرهان التسلسلي

(24) النتيجة 3.2 باستعمال البرهان الحر

البرهان:

$\triangle MNO$  فيه  $\angle M$  قائمة.

$180^\circ = m\angle M + m\angle N + m\angle O$ ،  $90^\circ = m\angle M$ ، ولذلك فإن

$90^\circ = m\angle N + m\angle O$ ، فإذا كانت  $N$  زاوية قائمة فسيكون

$0^\circ = m\angle O$ ، وهذا مستحيل. لذلك لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان قائمتان.

الحل

$$m\angle R + m\angle S + m\angle T = 180^\circ$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle R$  زاوية قائمة

معطى

$$m\angle R = 90^\circ$$

تعريف الزاوية القائمة

$$90 + m\angle S + m\angle T = 180^\circ$$

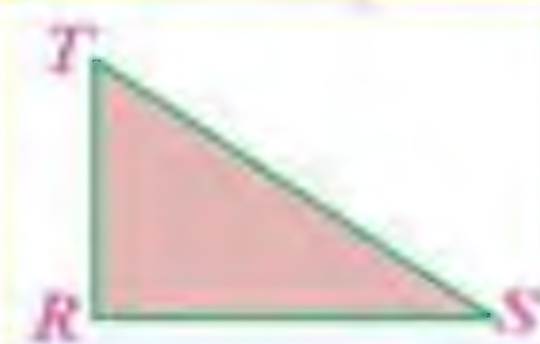
بالتعويض

$$m\angle S + m\angle T = 90^\circ$$

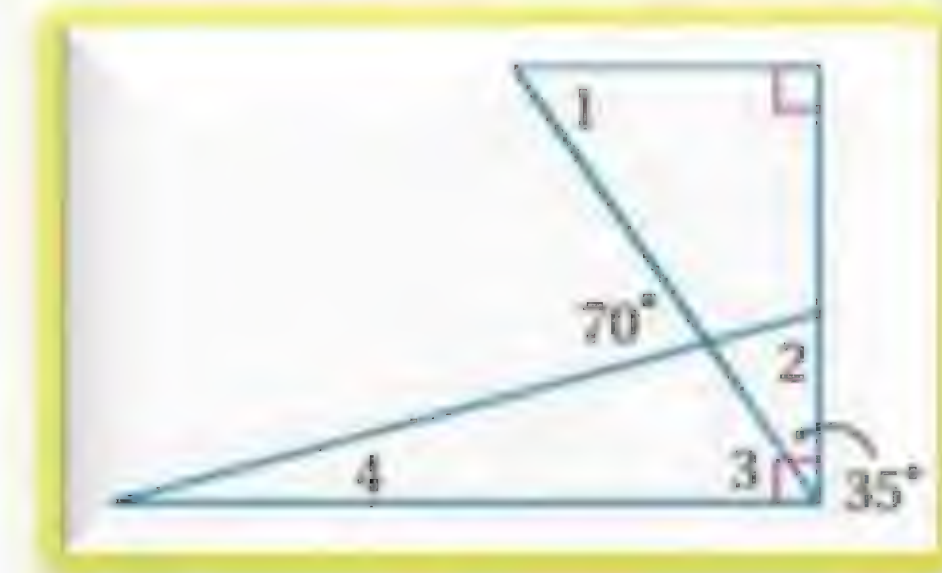
خاصية الطرح للمساواة

$m\angle S$ ،  $m\angle T$  زاويتان متتامتان

تعريف الزاويتان المتتامتان







$$M \angle 1 = 180 - (35 + 90)$$

$$M \angle 1 = 180 - 125$$

$$M \angle 1 = 55$$

الزاوية المجاورة لـ  $70 = 110$  حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم

وكذلك الزاوية المجاورة لـ  $70 = 110$  حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم

$$M \angle 2 = 180 - (70 + 35)$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$M \angle 2 = 75$$

$$M \angle 4 = 180 - (M \angle 2 + 90)$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$M \angle 4 = 180 - (75 + 90)$$

$$M \angle 4 = 15$$

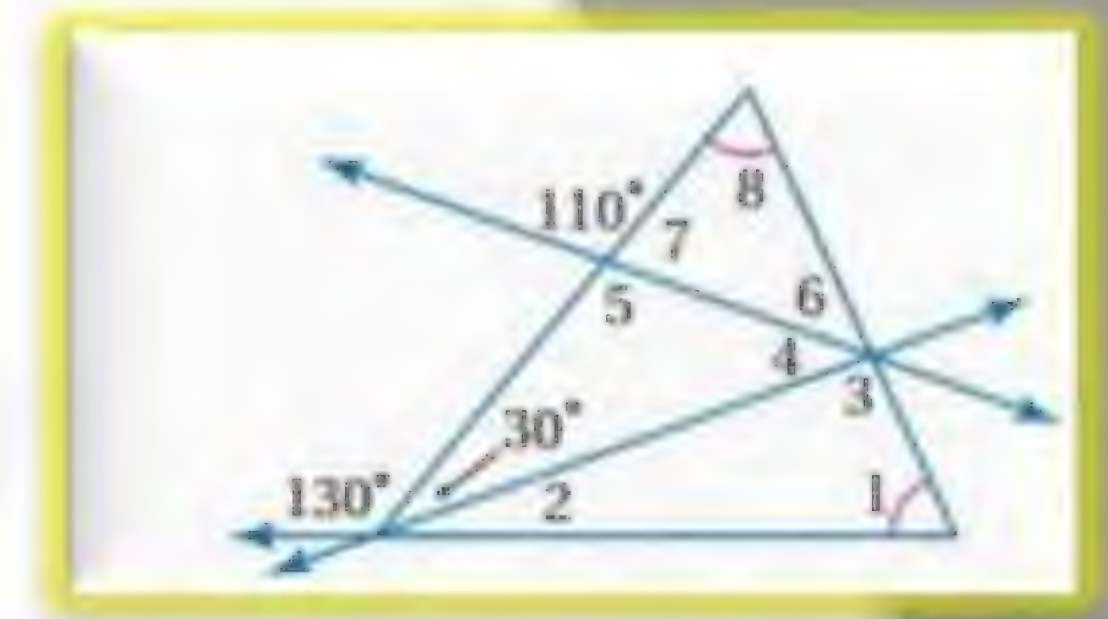
$$M \angle 3 = 180 - (M \angle 4 + 110)$$

$$M \angle 3 = 180 - (15 + 110)$$

$$M \angle 3 = 55$$







**زاويتان متجاورتان على مستقيم**  
 $M \angle 7 = 180 - 110$   
 $M \angle 7 = 70$

**بالتقابل بالرأس**  
 $M \angle 5 = 110$

$M \angle 4 = 180 - (110 + 30)$   
 $M \angle 4 = 40$

$M \angle 2 = 180 - (130 + 30)$   
 $M \angle 2 = 20$

$(\angle 30 + \angle 2) + (\angle 8 + \angle 1) = 180$   
**نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة**

$\therefore \angle 8 = \angle 1$

$\therefore (30 + 20) + (\angle 1 + \angle 1) = 180$

$50 + 2 \angle 1 = 180$

$2 \angle 1 = 180 - 50 = 130$

$\angle 1 = 65$

$\angle 8 = 65$

$\angle 6 = 180 - (\angle 8 + \angle 7)$

$\angle 6 = 180 - (65 + 70)$

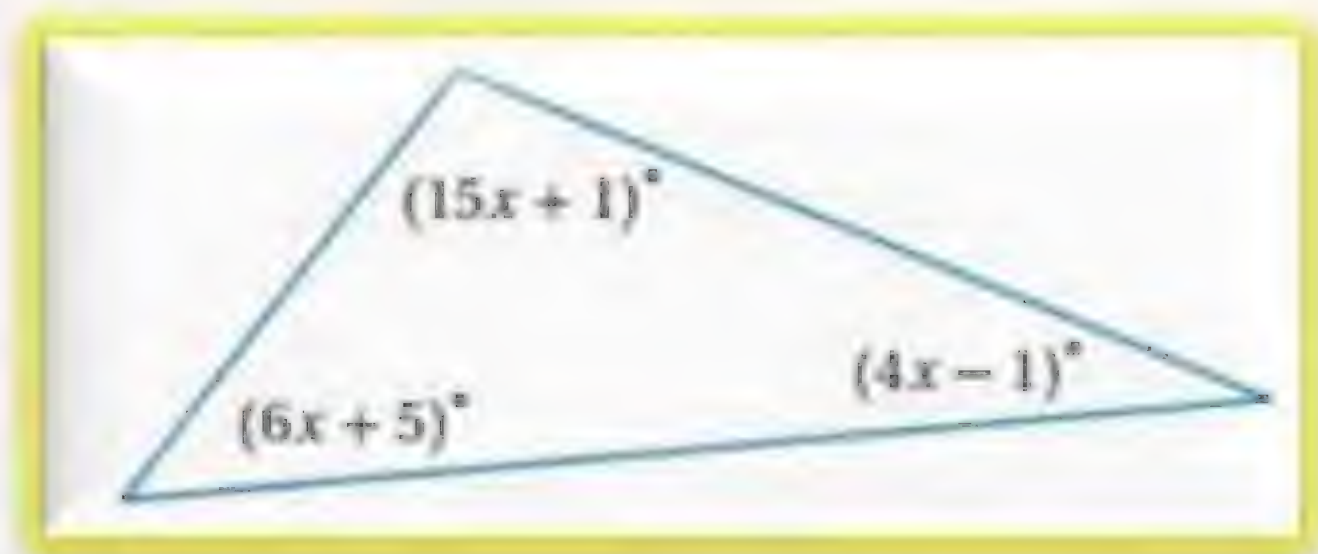
$\angle 6 = 49$

$\angle 3 = 180 - (\angle 1 + \angle 2)$

$\angle 3 = 180 - (65 + 20)$

$\angle 3 = 95$





**27) جبر: صنف المثلث المجاور وفقاً لزاياه وفسر إجابتك.**



**منفرج الزاوية لأن مجموع قياسات الزوايا 180، لذلك فإن**  
 **$X = 7$ ، وبالتعويض في العبارات الثلاث نجد أن قياسات**  
**الزوايا الثلاث هي 106 , 47 , 27**

$$(15X + 1) + (6X + 5) + (4X - 1) = 180$$

$$25X + 5 = 180$$

$$25X = 175$$

$$X = 7$$

$$15X + 1 = 15 \times 7 + 1 = 106$$

$$6X + 5 = 47$$

$$4X - 1 = 27$$



28) قرر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة:

"إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90، فإن المثلث حادّ الزوايا."



صحيحة، بما أن مجموع قياسي الزاويتين الحادتين أكبر من 90 فإن قياس الزاوية الثالثة يساوي 180 ناقصا عددا أكبر من 90، وسيكون ناتج الطرح أقل من 90 بالتأكيد وعليه فإن زوايا هذه المثلث الثلاث حادة وهو مثلث حاد الزوايا.

29) سيارات، انظر إلى الصورة المجاورة:

(a) أوجد  $m\angle 1$ ,  $m\angle 2$ .



$$\angle 2 = 180 - (70 + 71)$$

حسب نظرية مجموع زوايا المثلث

$$\angle 2 = 39$$

$$\angle 1 = (70 + 71)$$

حسب نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$$\angle 1 = 141$$







(b) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في  $m\angle 1$  ؟ فسر إجابتك.

**سوف يزداد قياس الزاوية 1، لأن غطاء السيارة سيقترب من الساق الأخرى للمثلث المحاذية لرفوف السيارة.**

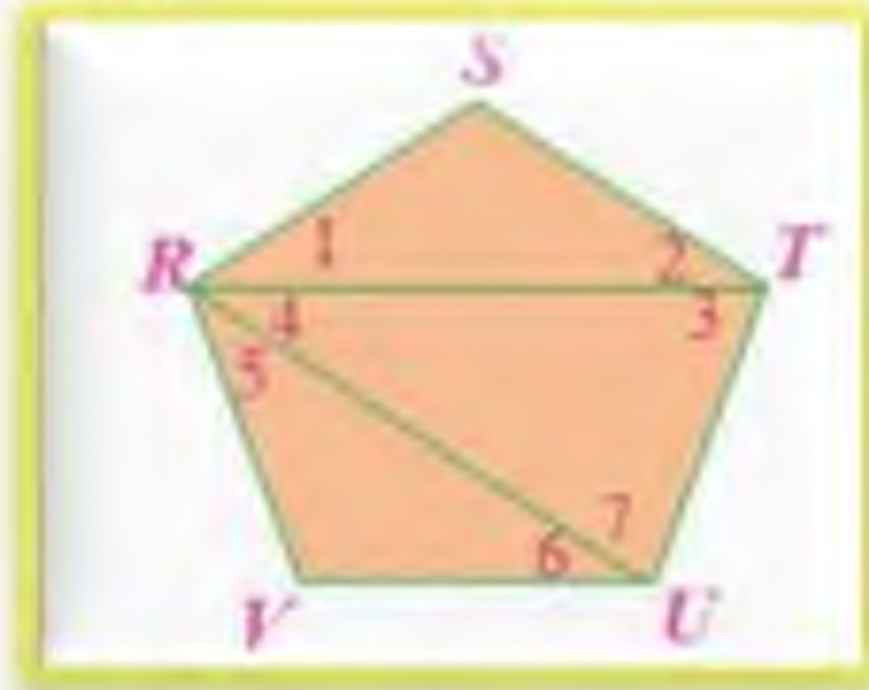


(c) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في  $m\angle 2$  ؟ فسر إجابتك.

**سوف يقل قياس الزاوية 2، لأن قياس الزاوية 1 سوف يزداد ولأن هاتين الزاويتين متجاورتان على مستقيم.**



برهان، برهن كلاً مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:



(30) برهان ذو عمودين

المعطيات، شكل خماسي  $RSTUV$ .

المطلوب،

$$m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV + m\angle V + m\angle VRS = 540^\circ$$



1) (معطى) خماسي  $RSTUV$

$$2) m\angle S + m\angle 1 + m\angle 2 = 180,$$

$$m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 7 = 180,$$

$$m\angle 6 + m\angle V + m\angle 5 = 180$$

(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

$$3) m\angle S + m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3$$

$$+ m\angle 4 + m\angle 7 + m\angle 6 + m\angle V$$

$$+ m\angle 5 = 540$$

خاصية الجمع للمساواة

$$4) m\angle VRS = m\angle 1 + m\angle 4 + m\angle 5$$

$$m\angle TUV = m\angle 7 + m\angle 6,$$

$$m\angle STU = m\angle 2 + m\angle 3$$

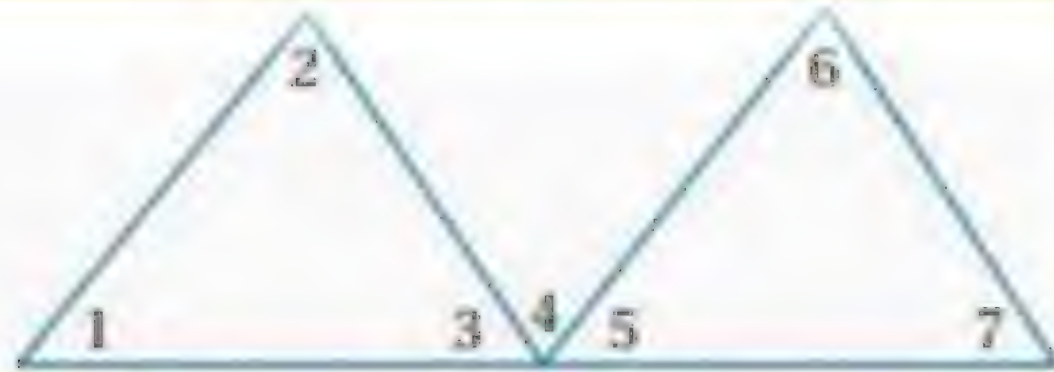
(مسلمة جمع الزوايا)

$$5) m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV +$$

$$m\angle V + m\angle VRS = 540$$

(بالتعويض)





(31) برهان تسلسلي

المعطيات:  $\angle 3 \cong \angle 5$

المطلوب:  $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$



$$\begin{aligned} m\angle 1 + m\angle 2 &= m\angle 4 + m\angle 5 \\ m\angle 6 + m\angle 7 &= m\angle 3 + m\angle 4 \end{aligned}$$

نظرية الزاوية الخارجية

$$\angle 3 = \angle 5$$

معطى

$$m\angle 4 + m\angle 3 = m\angle 3 + m\angle 4$$

خاصية الإبدال

$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 3$$

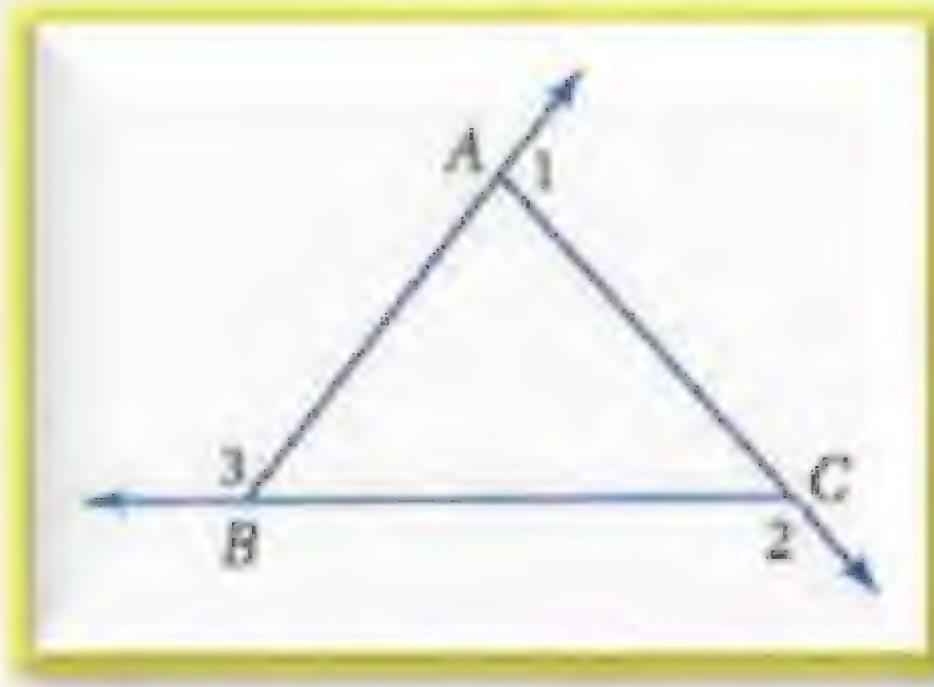
بالتعويض

$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$$

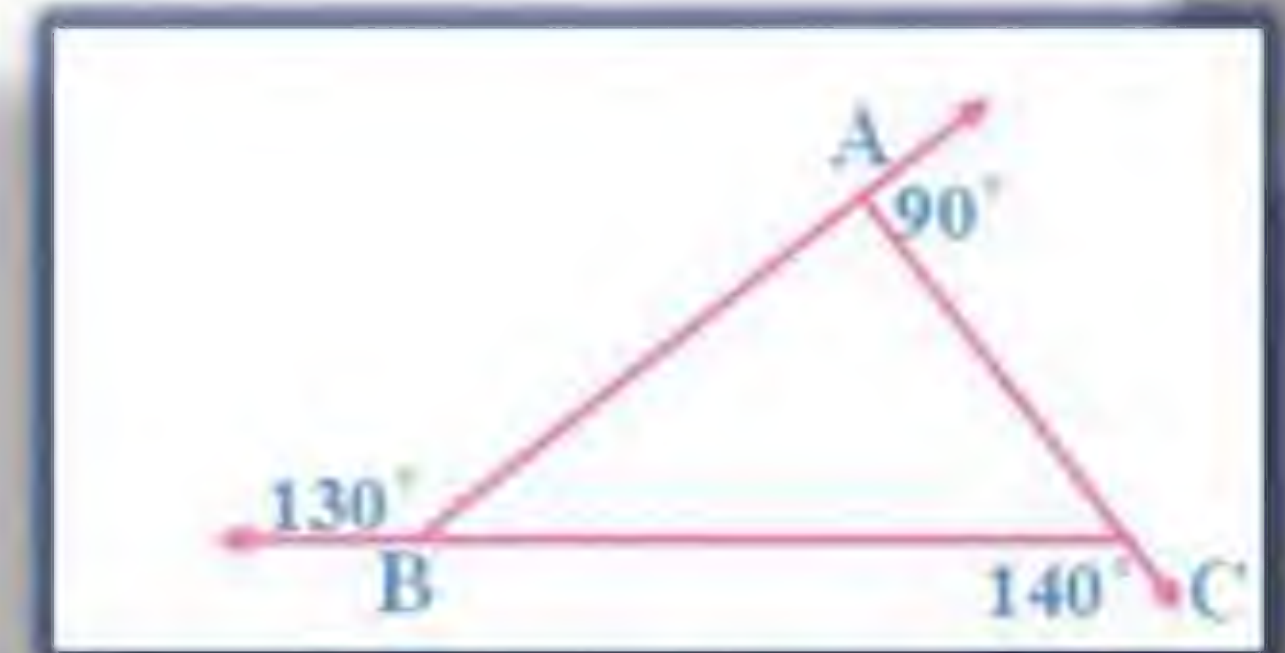
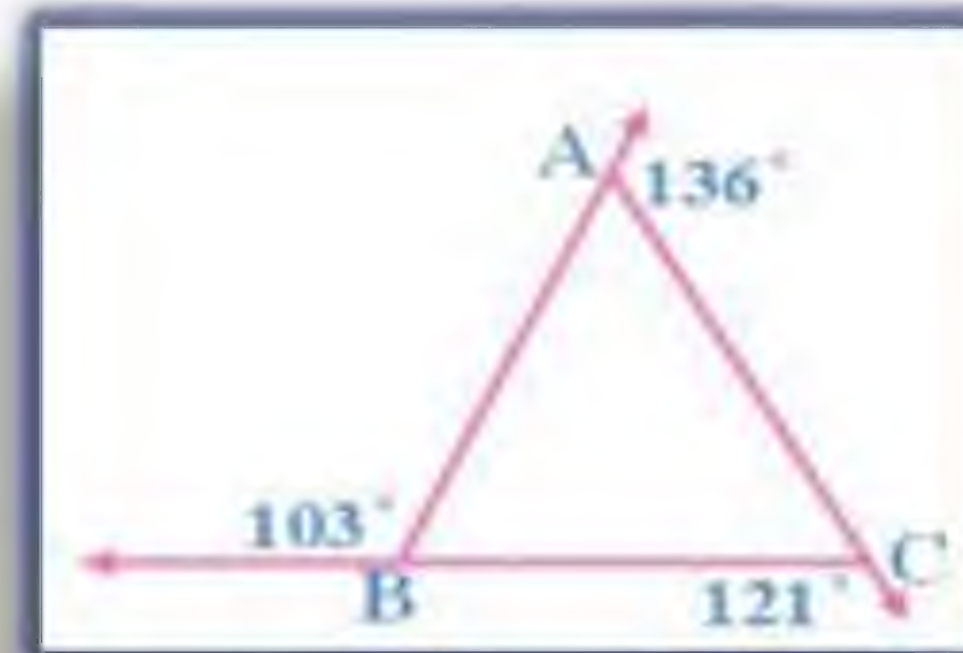
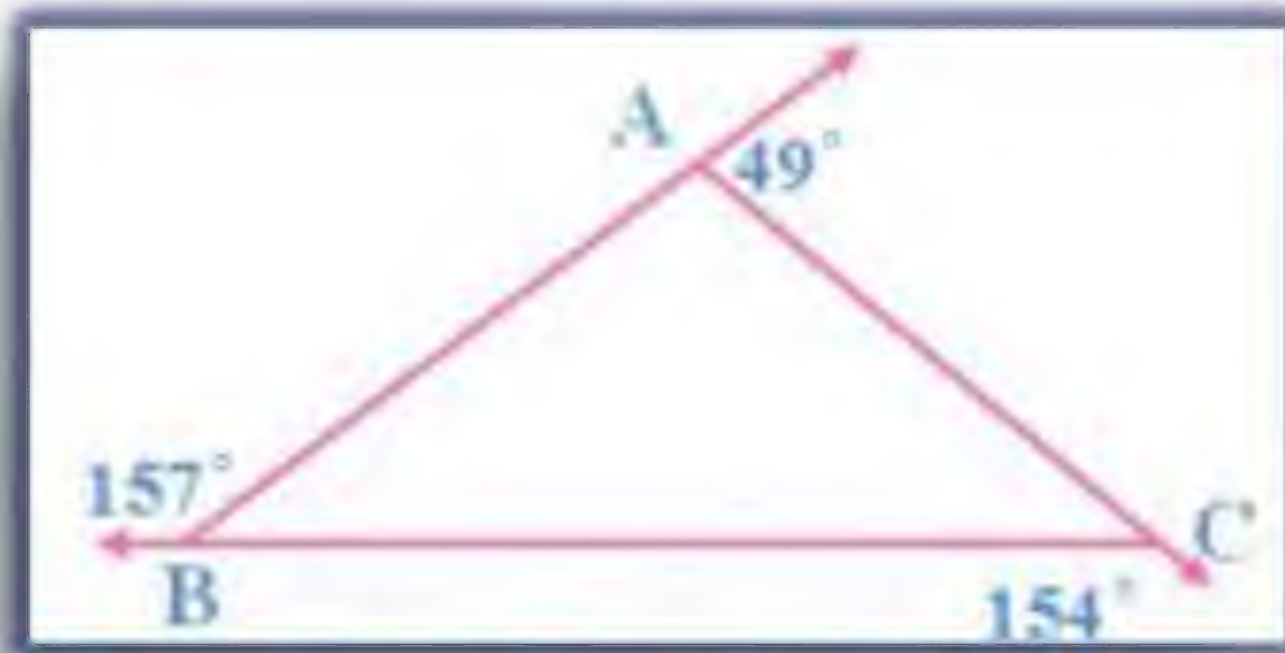
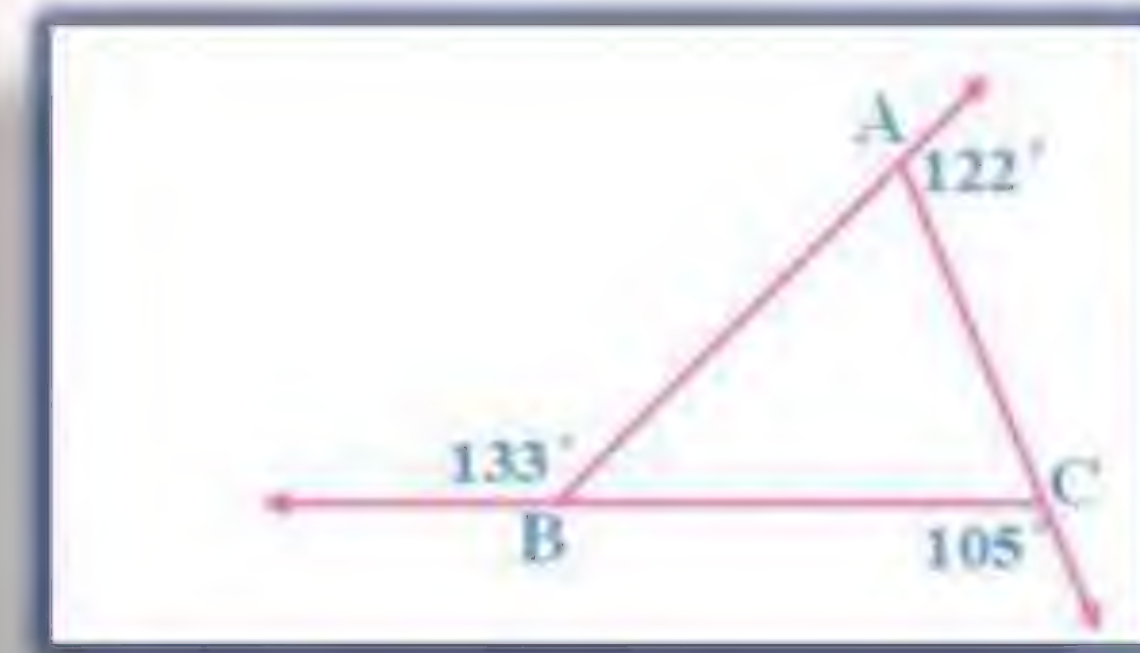
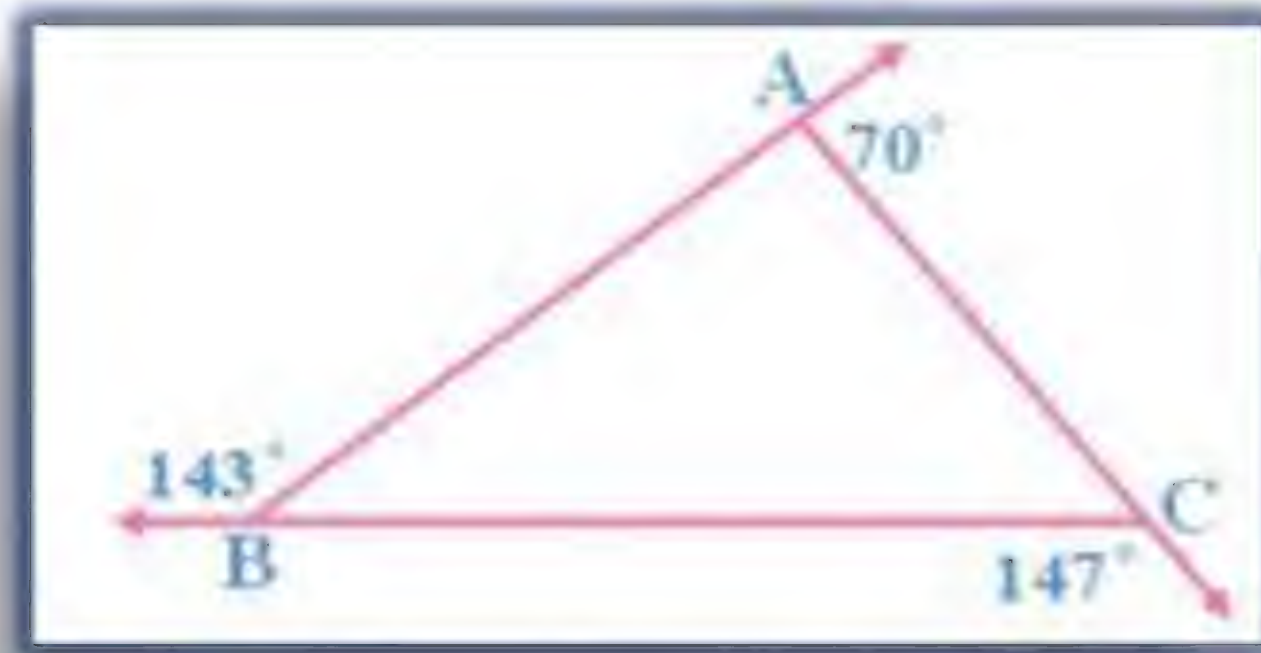
بالتعويض



(32) تمثيلات متعددة، في هذه المسألة ستستكشف مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث.



(a) هندسيًا، ارسم خمسة مثلثات مختلفة، ومُدّ الأضلاع وسمّ الزوايا كما في الشكل المجاور، على أن يكون ضمن المثلثات التي رسمتها على الأقل مثلث منفرج الزاوية، وآخر قائم الزاوية، ومثلث حادّ الزوايا.

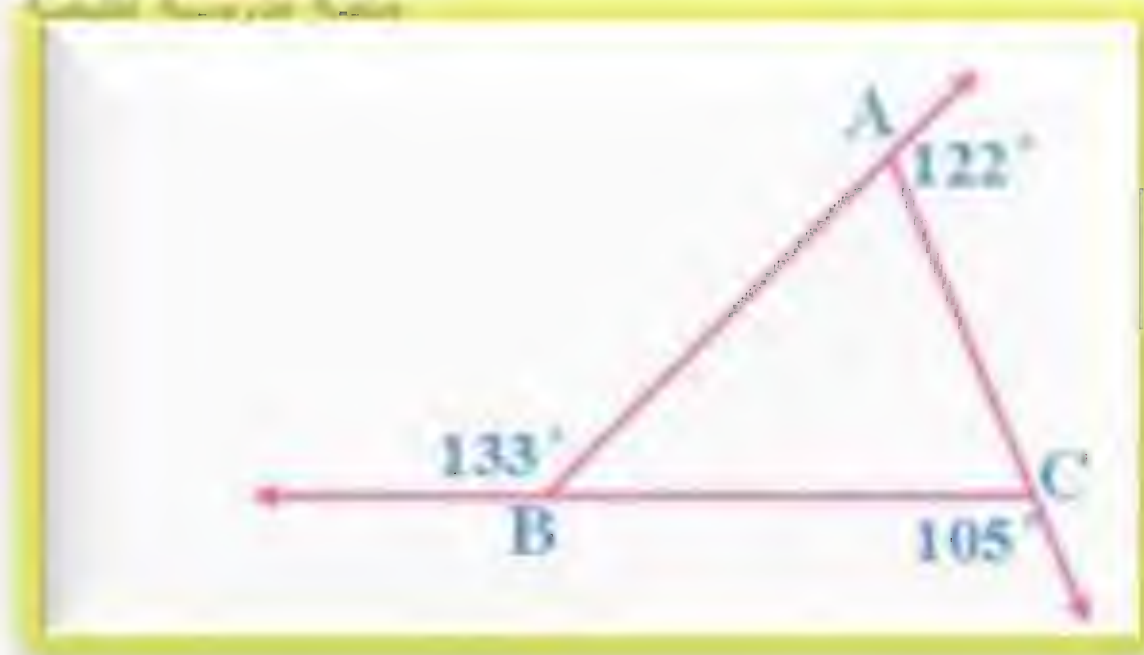


مثلث منفرج الزاوية

مثلث حادّ الزوايا

مثلث قائم الزاوية





(b) جدولياً، قس الزوايا الخارجية لكل مثلث، وسجل القياسات ومجموعها لكل مثلث في جدول.

المجموع	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$
٣٦٠	١٢٢	١٠٥	١٣٣
٣٦٠	٧٠	١٤٧	١٤٣
٣٦٠	٩٠	١٤٠	١٣٠
٣٦٠	١٣٦	١٢١	١٠٣
٣٦٠	٤٩	١٥٤	١٥٧



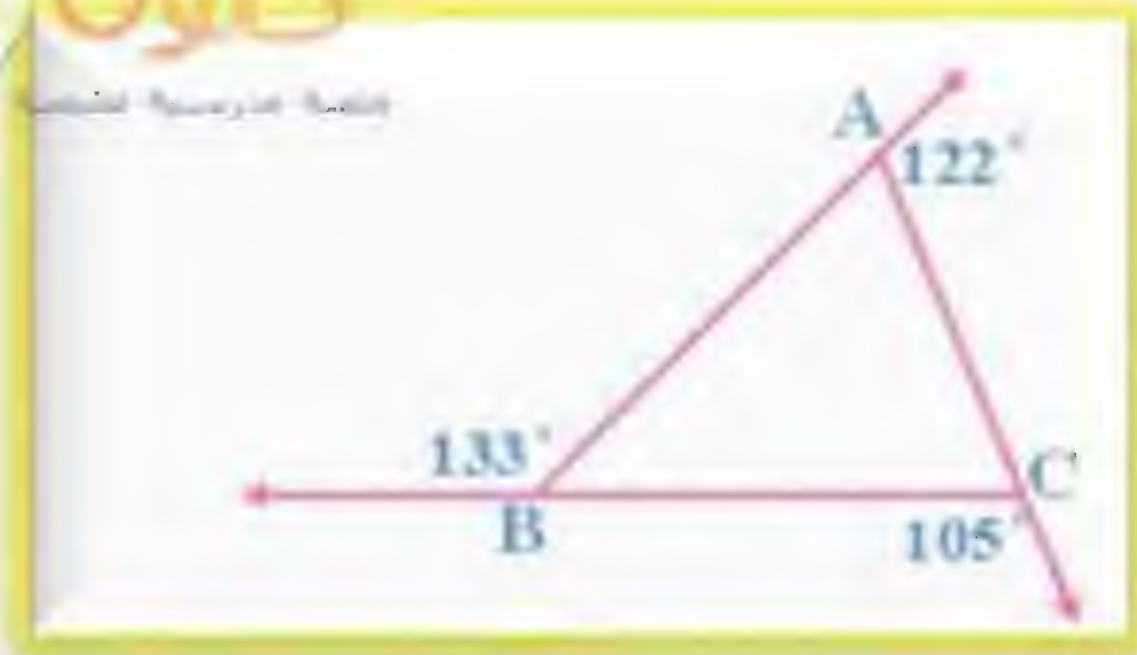
(c) لفظياً، تخمن مجموع الزوايا الخارجية للمثلث، واكتب تخمينك.

**لفظياً: مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث يساوي 360**

(d) جبرياً، عبّر عن التخمين الذي وصلت إليه في الجزء c جبرياً.

$$M \angle 1 + M \angle 2 + M \angle 3 = 360$$





(e) تحليليًا، اكتب برهانًا حرًا لإثبات التخمين الذي توصلت إليه.



تخبرنا نظرية الزاوية الخارجية بأن

$$M \angle 3 = M \angle CBA + M \angle BCA,$$

وأن

$$M \angle 2 = M \angle BAC + M \angle CBA, M \angle 1 = M \angle CBA + M \angle BCA$$

وبالتعويض

$$M \angle 1 + M \angle 2 + M \angle 3 = M \angle CBA + M \angle BCA + M \angle BAC + M \angle CBA + M \angle CAB + M \angle BCA .$$

ويمكن تبسيط هذه المعادلة بالشكل التالي:

$$M \angle 1 + M \angle 2 + M \angle 3 = 2M \angle CBA + 2M \angle BCA + 2M \angle BAC$$

وباستعمال خاصية التوزيع ينتج:

$$M \angle 1 + M \angle 2 + M \angle 3 = 2(M \angle CBA + M \angle BCA + M \angle BAC)$$

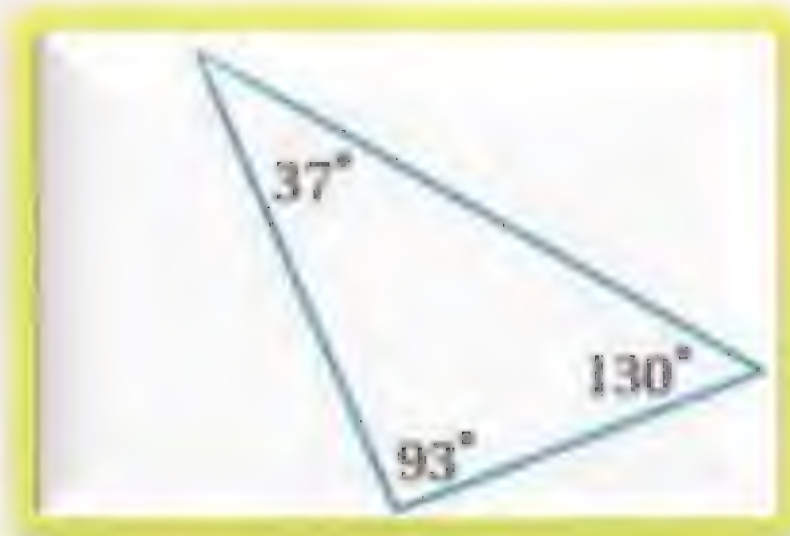
وتخبرنا نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث أن

$$M \angle CBA + M \angle BCA + M \angle BAC = 180$$

وبالتعويض ينتج أن

$$M \angle 1 + M \angle 2 + M \angle 3 = 2(180) = 360$$



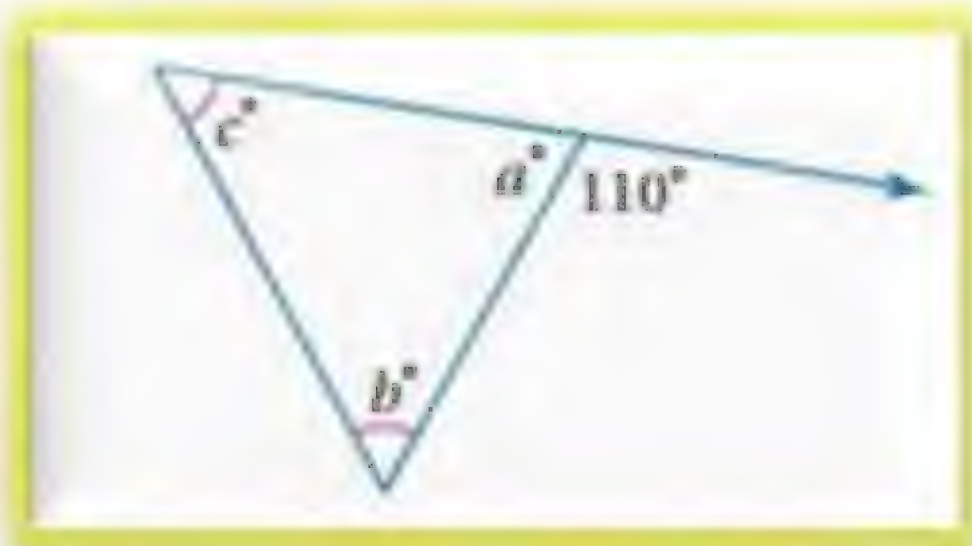


(33) **اكتشف الخطأ** قام خالد بقياس زوايا المثلث وكتبها كما في الشكل.  
فقال عادل: إن هناك خطأ في هذه القياسات، وضح بطريقتين مختلفتين على الأقل  
كيف توصل عادل إلى هذه النتيجة.

تنص النتيجة 3.2 على أنه يمكن أن يكون في أي مثلث زاوية قائمة أو منفرجة واحدة  
على الأكثر، وبما أنه كتب في المثلث قياسان لزاويتين منفرجتين 93, 130 فإن  
واحدًا على الأقل منها غير صحيح.

الحل

وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180 حسب نظرية مجموع قياسات  
زوايا المثلث ومجموع القياسات المسجلة في هذا المثلث = 260 فإن واحدًا على  
الأقل من هذه القياسات غير صحيح



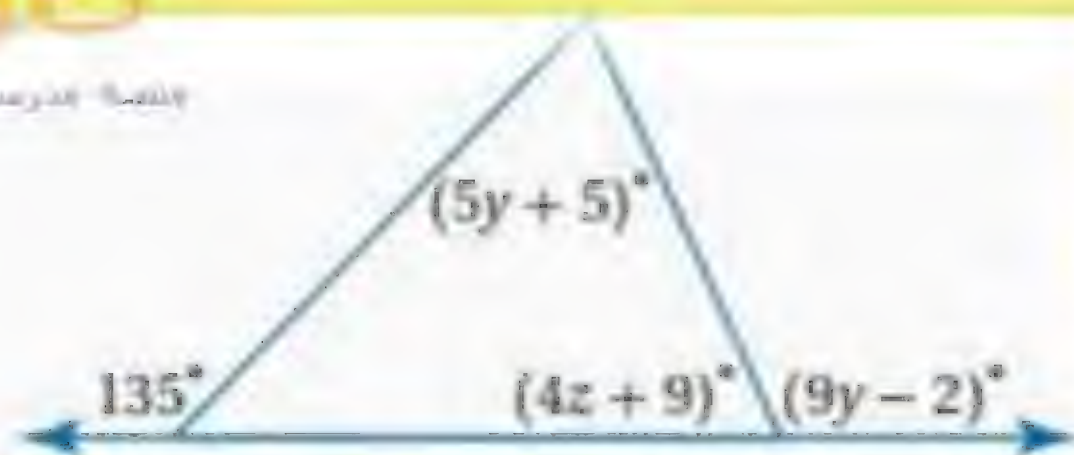
(34) **اكتب** فسر كيف يمكنك إيجاد القياسات المجهولة في الشكل المجاور؟

$\angle A = 70$  لأن هذه الزاوية والزاوية التي قياسها 110  
متجاورتان على مستقيم

وبما أن  $\angle C = \angle B = M$  ومجموعهما يساوي 110  
إن  $55 = M \angle C = M \angle B$

الحل





35) **تحذّر** أوجد قيمة كل من  $z$ ،  $y$  في الشكل المجاور.

الحل

$$(4z + 9)^\circ + (9y - 2)^\circ = 180^\circ$$

$$4z + 9 + 9y - 2 = 180^\circ$$

$$4z + 9y = 180^\circ - 7$$

$$4z + 9y = 173 \rightarrow 1$$

$$(5y + 5)^\circ + (4z + 9)^\circ = 135^\circ$$

$$5y + 5 + 4z + 9 = 135^\circ$$

$$5y + 4z = 135^\circ - 14$$

$$4z + 5y = 121 \quad \times -1$$

$$-4z - 5y = -121 \rightarrow 2$$

بجمع المعادلة ١ و ٢

$$4y = 52$$

$$y = 13$$

$$4z + 9y = 173$$

$$4z + 9 \times 13 = 173$$

$$4z = 56$$

$$z = 14$$

36) **تبرير** إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة لـ  $\angle A$  حادة، فهل  $\triangle ABC$  حادة الزوايا أم قائم الزاوية أم منفرج الزاوية أم أنه لا يمكن تحديد نوعه؟ وضع إجابتك.

**منفرج الزاوية، لان الزاوية الخارجية حادة ومجموع الزاويتين البعديتين أقل من 90  
لذا فان الزاوية الثالثة ستكون أكبر من 90 حتما .**

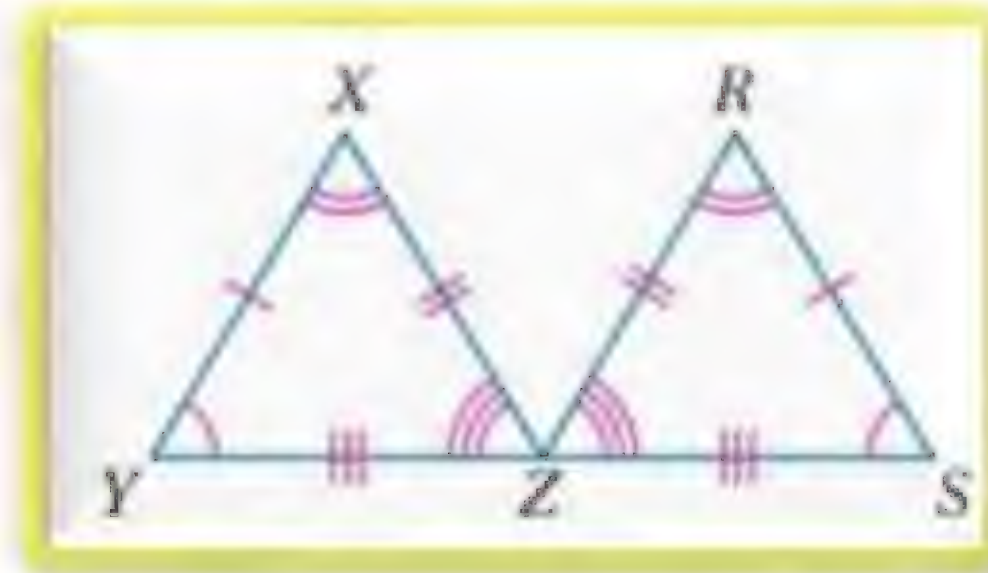
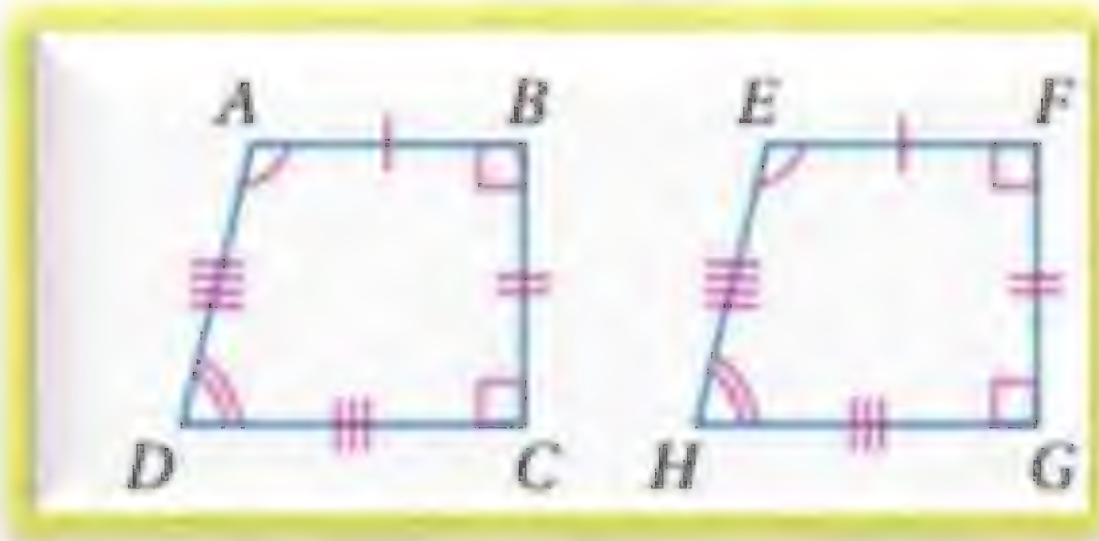
الحل



تأكد

في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق:

المثال ١



$\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G,$   
 $\angle D \cong \angle H$   
 $AB \cong EF, CD \cong GH, AD \cong EH,$   
 $BC \cong FG$   
 $EFGH \cong ABCD$

$\angle Y \cong \angle S, \angle X \cong \angle R,$   
 $\angle XZY \cong \angle RZS$   
 $YX \cong SR, YZ \cong SZ, XZ \cong RZ$   
 $\triangle YXZ \cong \triangle SRZ$

الجل



## ٣-٣ المثلثات المتطابقة Congruent Triangles

### لماذا؟

### فيما سبق:

درست الزوايا المتطابقة واستعمالاتها.

### والآن:

- أسمى العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة وأستعملها.
- أثبت تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق

تقوم عدّة مصانع بصنع مسجلات سيارات بواجهات متحركة يصعب نزعها لحمايتها من السرقة، علماً بأن شكل هذه الواجهات وأبعادها تطابق تمامًا شكل المكان الذي تثبت فيه وأبعاده؛ وذلك لتثبيتها في لوحة أجهزة السيارة بدقة.

**التطابق والعناصر المتناظرة:** إذا كان لشكلين هندسيين الشكل نفسه والقياسات نفسها فإنهما **متطابقان**.

### المفردات

#### التطابق

Congruent

#### المضلعات المتطابقة

Congruent Polygons

#### العناصر المتناظرة

Corresponding Parts

[www.obeikaneducation.com](http://www.obeikaneducation.com)



#### غير متطابقة



الشكلان 4, 5 لهما الشكل نفسه، لكنهما مختلفان في القياسات.

#### متطابقة



الأشكال 1, 2, 3 لها الشكل نفسه والقياسات نفسها على الرغم من أنها في أوضاع مختلفة.



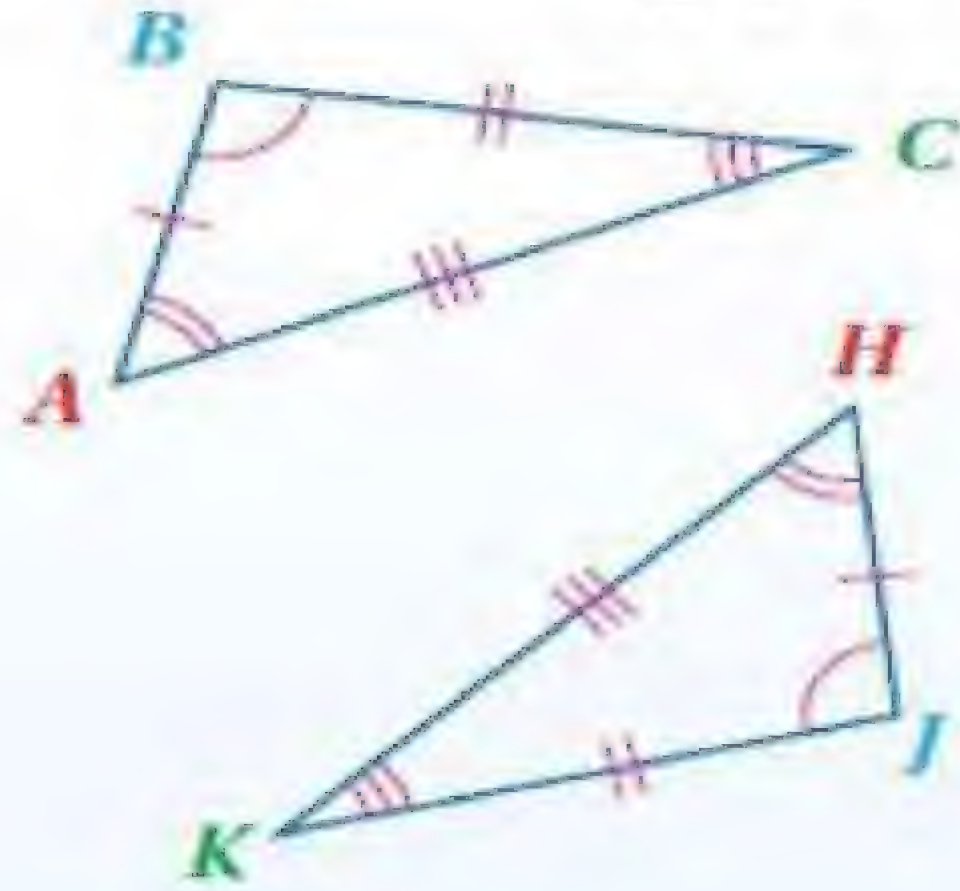
في أي مضلعين متطابقين تتطابق العناصر المتناظرة. وتتضمن العناصر المتناظرة الزوايا والأضلاع.

أضف إلى  
مطوياتك

مفهوم أساسي

تعريف المضلعات المتطابقة

نموذج:



التعبير اللفظي: يتطابق مضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

الزوايا المتناظرة

مثال:

$$\angle C \cong \angle K \quad \angle B \cong \angle J \quad \angle A \cong \angle H$$

الأضلاع المتناظرة

$$\overline{CA} \cong \overline{KH} \quad \overline{BC} \cong \overline{JK} \quad \overline{AB} \cong \overline{HJ}$$

عبارة التطابق

$$\triangle ABC \cong \triangle HJK$$

هناك عبارات تطابق أخرى للمثلثين أعلاه. وعبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تظهر الرؤوس بالترتيب نفسه.

عبارة غير صحيحة

$$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$$

عبارة صحيحة

$$\triangle BCA \cong \triangle JKH$$



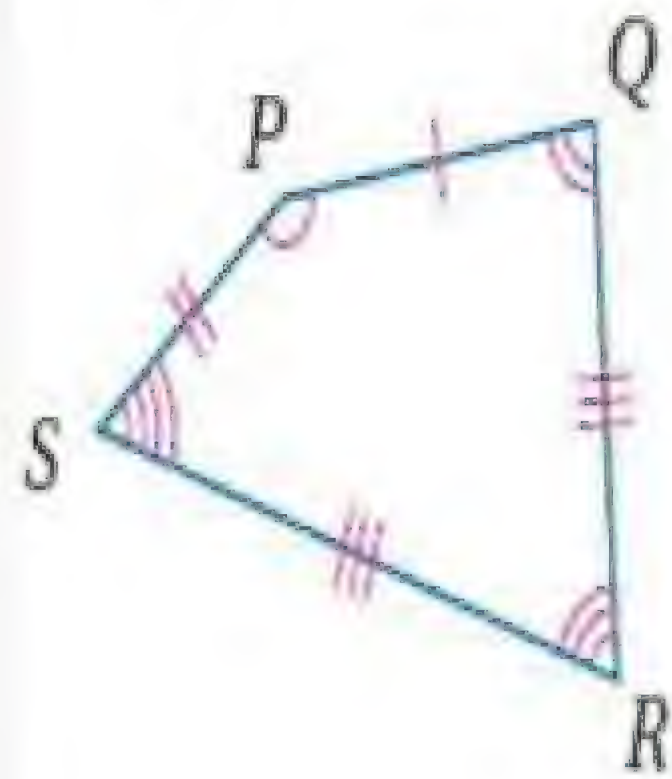
# ٣-٣ المثلثات المتطابقة

## Congruent Triangles

مثال 1

تعرف العناصر المتناظرة المتطابقة

بين أن المثلثين المجاورين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق.

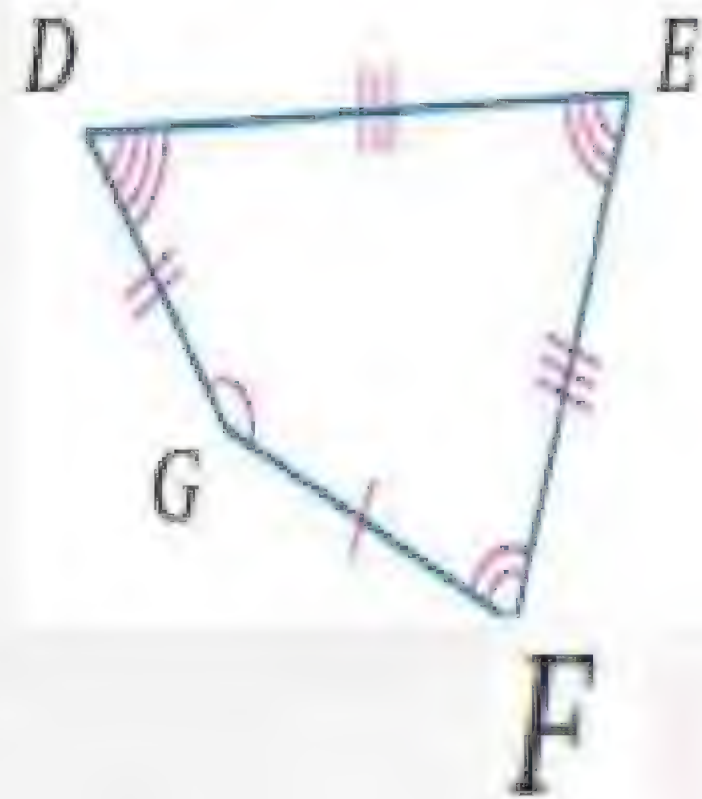


الزوايا:  $\angle P \cong \angle R, \angle Q \cong \angle S,$

$\angle R \cong \angle S, \angle S \cong \angle P$

الأضلاع:  $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{QR} \cong \overline{SP},$

$\overline{RS} \cong \overline{ED}, \overline{SP} \cong \overline{DG}$



وبما أن جميع العناصر المتناظرة للمثلثين متطابقة، فإن  
المثلث  $PQRS \cong GFED$ .



تاريخ الرياضيات

جوهان كارل فردريك

جاوس (1777م - 1855م)

قدم جاوس رمز التطابق ليثبت

أن طرفي المعادلة متساويان

حتى ولو كانا مختلفين شكلاً.

وقد حقق إنجازات عديدة في

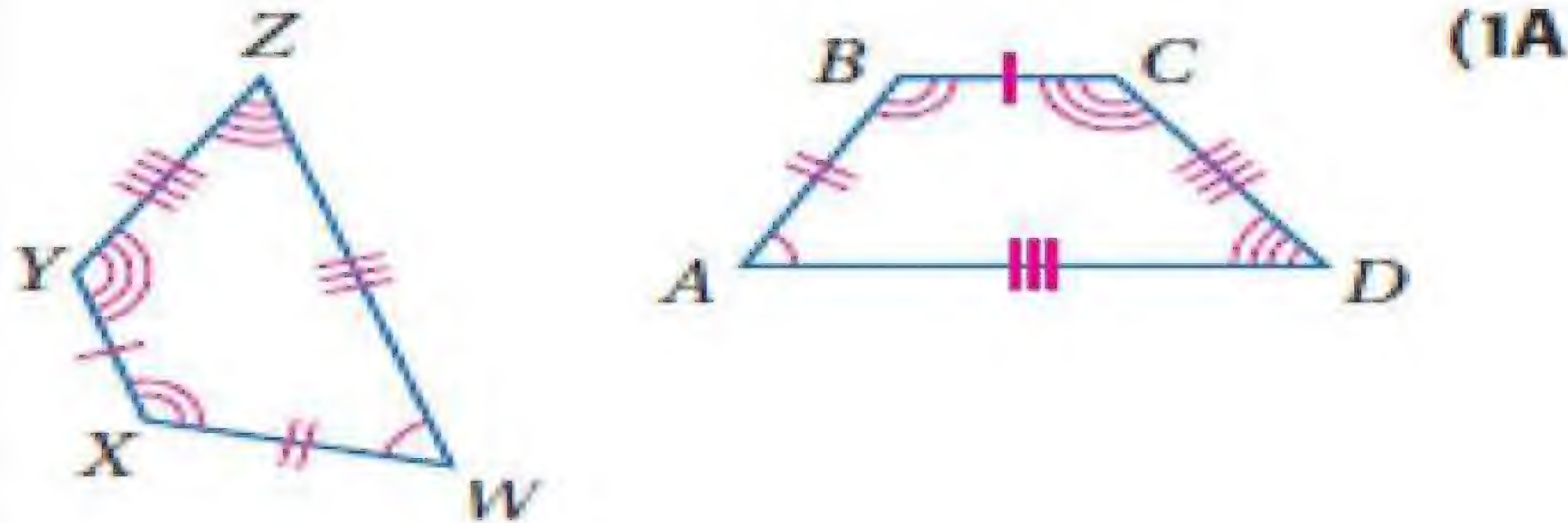
الرياضيات والفيزياء تتضمن

برهانا للنظرية الأساسية في

الجبر.



بين أن المضلعين المجاورين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق.

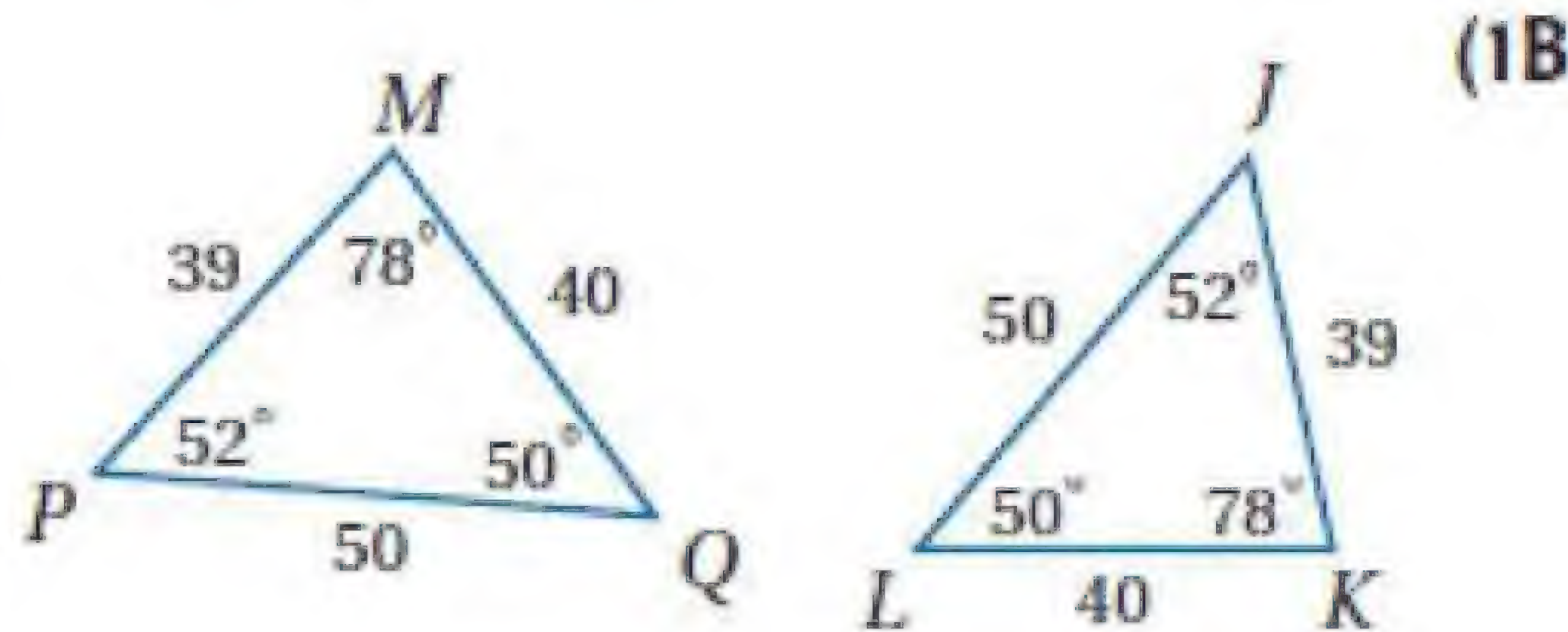


$\angle A \cong \angle W, \angle B \cong \angle X, \angle C \cong \angle Y, \angle D \cong \angle Z, (1A$   
 $\overline{AB} \cong \overline{WX}, \overline{BC} \cong \overline{XY}, \overline{CD} \cong \overline{YZ}, \overline{DA} \cong \overline{ZW},$   
 المضلع  $WXYZ \cong$  المضلع  $ABCD$



# Congruent Triangles

بين أن المثلثين المجاورين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق.



$$\begin{aligned} \angle J &\cong \angle P, \angle K \cong \angle M, \angle L \cong \angle Q, \quad (1B) \\ \overline{JK} &\cong \overline{PM}, \overline{KL} \cong \overline{MQ}, \overline{LJ} \cong \overline{QP}, \\ \triangle JKL &\cong \triangle PMQ \end{aligned}$$

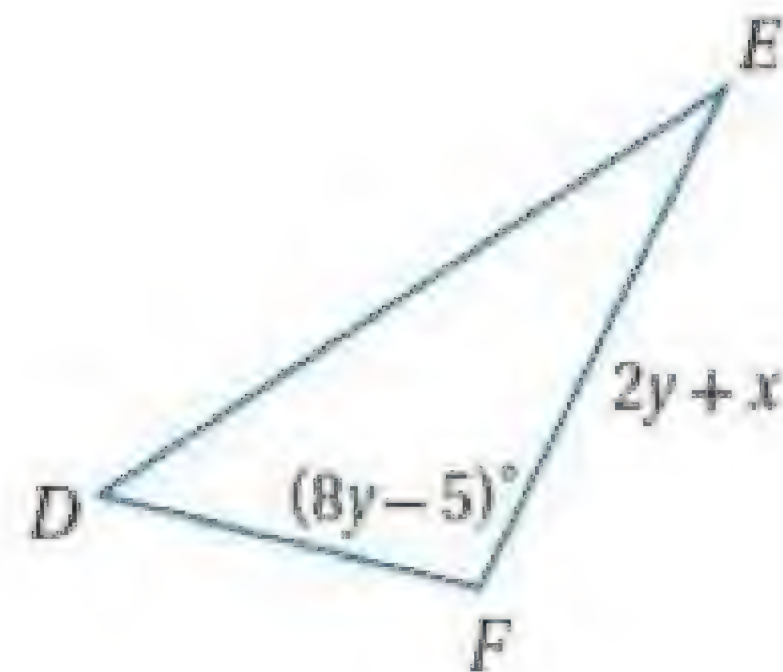
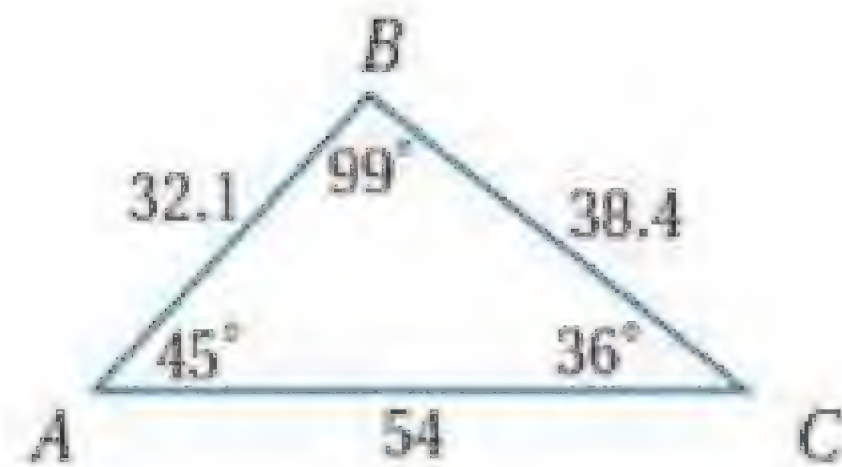


# ٣-٣ المثلثات المتطابقة Congruent Triangles

### مثال 2

تعيين العناصر المتناظرة المتطابقة

في الشكل المجاور إذا كان  $\triangle ABC \cong \triangle DFE$  ، فأوجد قيمة كل من  $x, y$  .



العناصر المتناظرة متطابقة

$$\angle F \cong \angle B$$

تعريف التطابق

$$m\angle F = m\angle B$$

بالتعويض

$$8y - 5 = 99$$

بإضافة 5 إلى الطرفين

$$8y = 104$$

بقسمة الطرفين على 8

$$y = 13$$

العناصر المتناظرة متطابقة

$$FE \cong BC$$

تعريف التطابق

$$FE = BC$$

بالتعويض

$$2y + x = 38.4$$

بالتعويض

$$2(13) + x = 38.4$$

بالتبسيط

$$26 + x = 38.4$$

ب طرح 26 من الطرفين

$$x = 12.4$$

### إرشادات للدراسة

استعمال عبارة التطابق

يمكنك استعمال عبارة

التطابق لمساعدتك

على معرفة الأضلاع

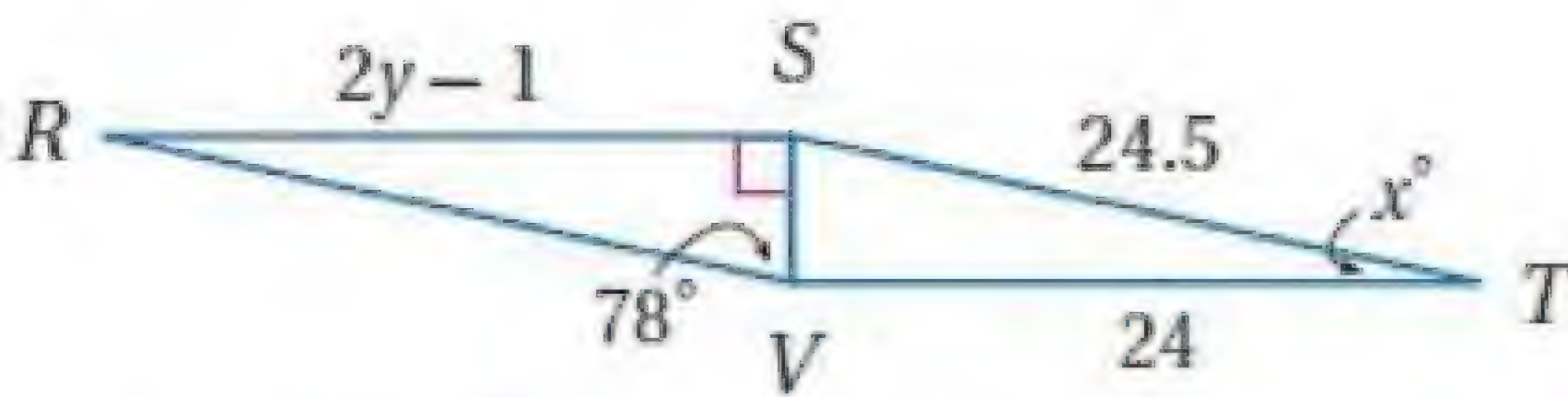
المتناظرة.

$$\triangle ABC \cong \triangle DFE$$

$$\overline{BC} \cong \overline{FE}$$



(2) في الشكل المجاور إذا كان  $\triangle RSV \cong \triangle TVS$ ، فأوجد قيمة كل من  $x, y$ .



$$m(\angle R) = 180^\circ - (90^\circ + 78^\circ)$$

$$m(\angle R) = 12^\circ$$

$$x = 12^\circ$$

من تطابق المثلثين

$$RS = VT$$

$$2y - 1 = 24$$

$$2y = 25$$

$$y = 12.5$$

$$x = 12, y = 12.5$$



## ٣-٣ المثلثات المتطابقة Congruent Triangles

**إثبات تطابق المثلثات** إن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 2-3 تعود إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

أضف إلى

مطوبتك

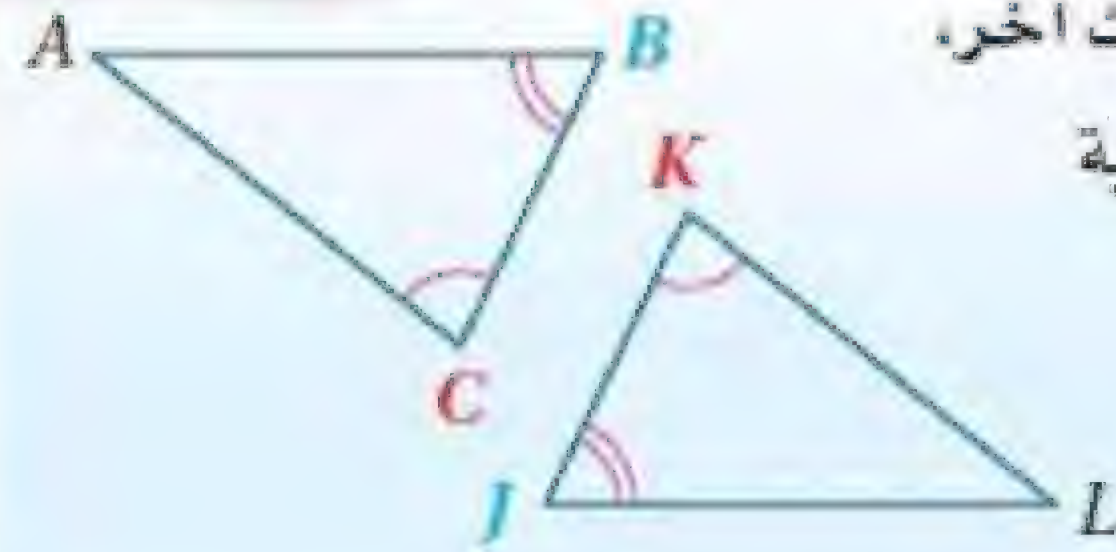
### نظرية 3.3

#### نظرية الزاوية الثالثة

**التعبير اللفظي:** إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

إذا كانت  $\angle C \cong \angle K$ ,  $\angle B \cong \angle J$ , فإن  $\angle A \cong \angle L$ .

مثال:



#### استعمال نظرية الزاوية الثالثة

#### مثال 3 من واقع الحياة

**تنظيم الحفلات:** قرّر منظمو حفلة مدرسية أن يطووا مناديل الطعام على صورة جيب مثلي حتى يتمكنوا من وضع هدية بسيطة فيه. إذا كانت:  $\angle NPQ \cong \angle RST$ ,  $m\angle NPQ = 40^\circ$ , فأوجد  $m\angle SRT$ .

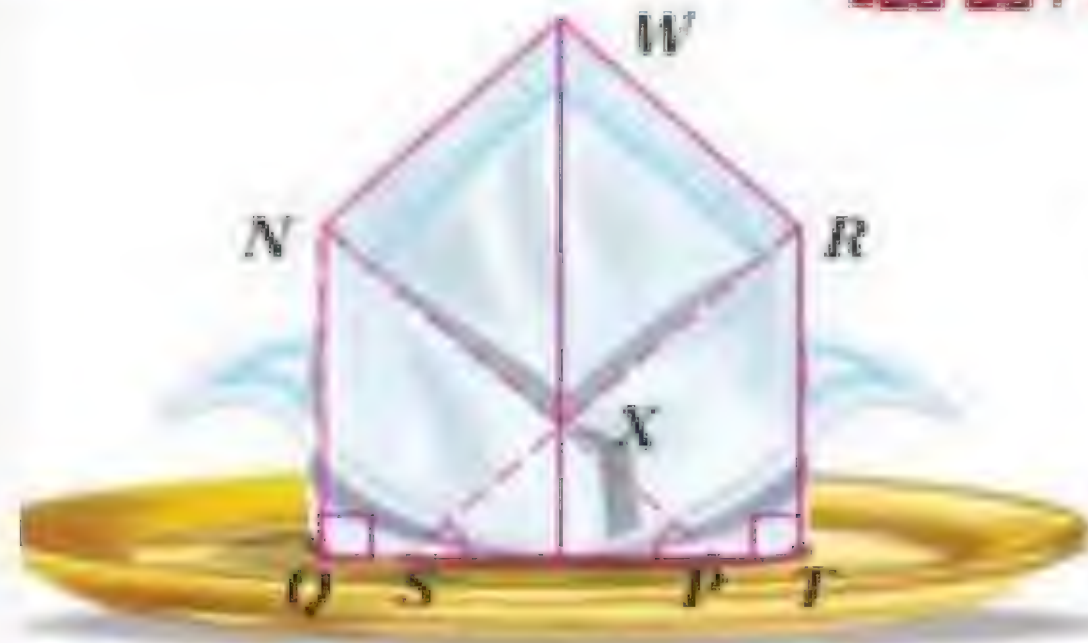
بما أن  $\angle NPQ \cong \angle RST$ , ولأن جميع الزوايا القائمة متطابقة ( $\angle NQP \cong \angle RTS$ ), فإن  $\angle QNP \cong \angle SRT$  بحسب نظرية الزاوية الثالثة؛ إذن  $m\angle QNP = m\angle SRT$ .

$$m\angle QNP + m\angle NPQ = 90^\circ \quad \text{الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية متتامتان}$$

$$m\angle QNP + 40^\circ = 90^\circ \quad \text{بالتعويض}$$

$$m\angle QNP = 50^\circ \quad \text{ب طرح } 40^\circ \text{ من الطرفين}$$

وبالتعويض فإن  $m\angle SRT = m\angle QNP = 50^\circ$ .



#### الربط مع الحياة

استعمال بعض المهارات الأساسية عند طي مناديل المائدة يضيف لمسة من الجمال والأناقة لأي حفلة. وكثير من هذه الطيات تأخذ شكل المثلث.





(3) في الشكل أعلاه إذا كانت  $\angle WNX \cong \angle WRX$ ، وكان  $\overline{WX}$  منصفاً لـ  $\angle NXR$ ، وكان  $m\angle WNX = 88^\circ$ ،  $m\angle NXW = 49^\circ$ ، فأوجد  $m\angle NWR$ . وفسر إجابتك.

(3)  $86^\circ$ ؛ بما أن:

$$\angle WNX \cong \angle WRX,$$

$$\angle NXW \cong \angle RXW, \text{ فإن}$$

$$\angle NWX \cong \angle RWX$$

$$m\angle NWX = 180^\circ - 88^\circ - 49^\circ$$

$$= 43^\circ$$

$$\text{فإن } m\angle NWR = 2 \times 43^\circ$$

$$= 86^\circ$$

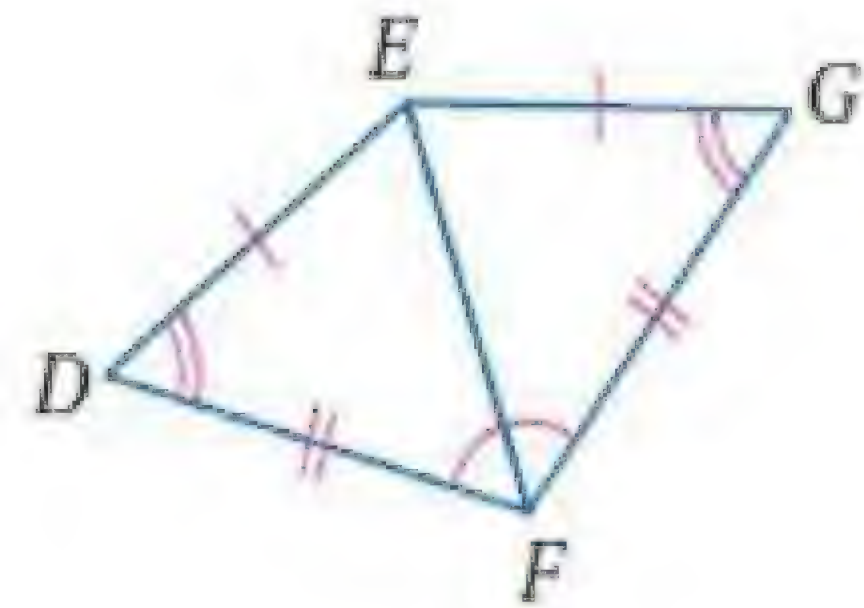


# ٣-٣ المثلثات المتطابقة Congruent Triangles

## الفصل الثالث

### مثال 4

إثبات تطابق مثلثين



اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات:  $\overline{DE} \cong \overline{GE}$ ,  $\overline{DF} \cong \overline{GF}$ ,  $\angle D \cong \angle G$

$$\angle DFE \cong \angle GFE$$

المطلوب:  $\triangle DEF \cong \triangle GEF$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطيات	$\overline{DE} \cong \overline{GE}$ , $\overline{DF} \cong \overline{GF}$ (1)
(2) خاصية الانعكاس للتطابق	$\overline{EF} \cong \overline{EF}$ (2)
(3) معطيات	$\angle D \cong \angle G$ , $\angle DFE \cong \angle GFE$ (3)
(4) نظرية الزاوية الثالثة	$\angle DEF \cong \angle GEF$ (4)
(5) تعريف المضلعات المتطابقة	$\triangle DEF \cong \triangle GEF$ (5)

## إرشادات للدراسة

### خاصية الانعكاس

عندما يشترك مثلثان

في ضلع، فاستعمل

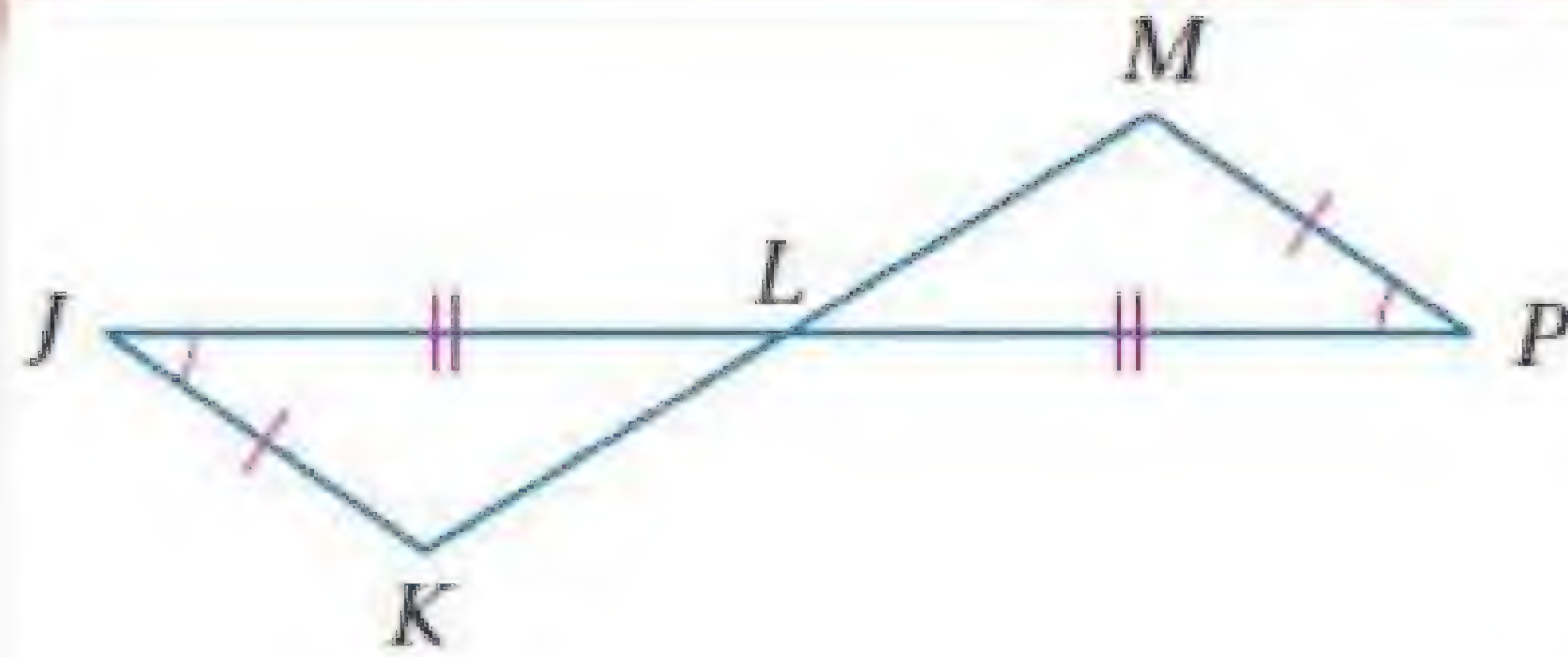
خاصية الانعكاس

للتطابق؛ لتثبت أن

الضلع المشترك يطابق

نفسه.





(4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات:  $\angle J \cong \angle P$ ,  $\overline{JK} \cong \overline{PM}$

$\overline{KM}$  تنصف  $L$ ,  $\overline{JL} \cong \overline{PL}$

المطلوب:  $\triangle JLK \cong \triangle PLM$

البرهان:

المبررات

العبارات

معطيات

(1)  $\angle J \cong \angle P$ ,  $\overline{JK} \cong \overline{PM}$ ,

و  $L$  تنصف  $\overline{KM}$   $\overline{JL} \cong \overline{PL}$

(2)  $\angle JLK \cong \angle PLM$

(3)  $\overline{LK} \cong \overline{LM}$

(4)  $\angle K \cong \angle M$

(5)  $\triangle JLK \cong \triangle PLM$

الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.  
تعريف منصف قطعة مستقيمة.  
نظرية الزاوية الثالثة.

تعريف تطابق مضعين



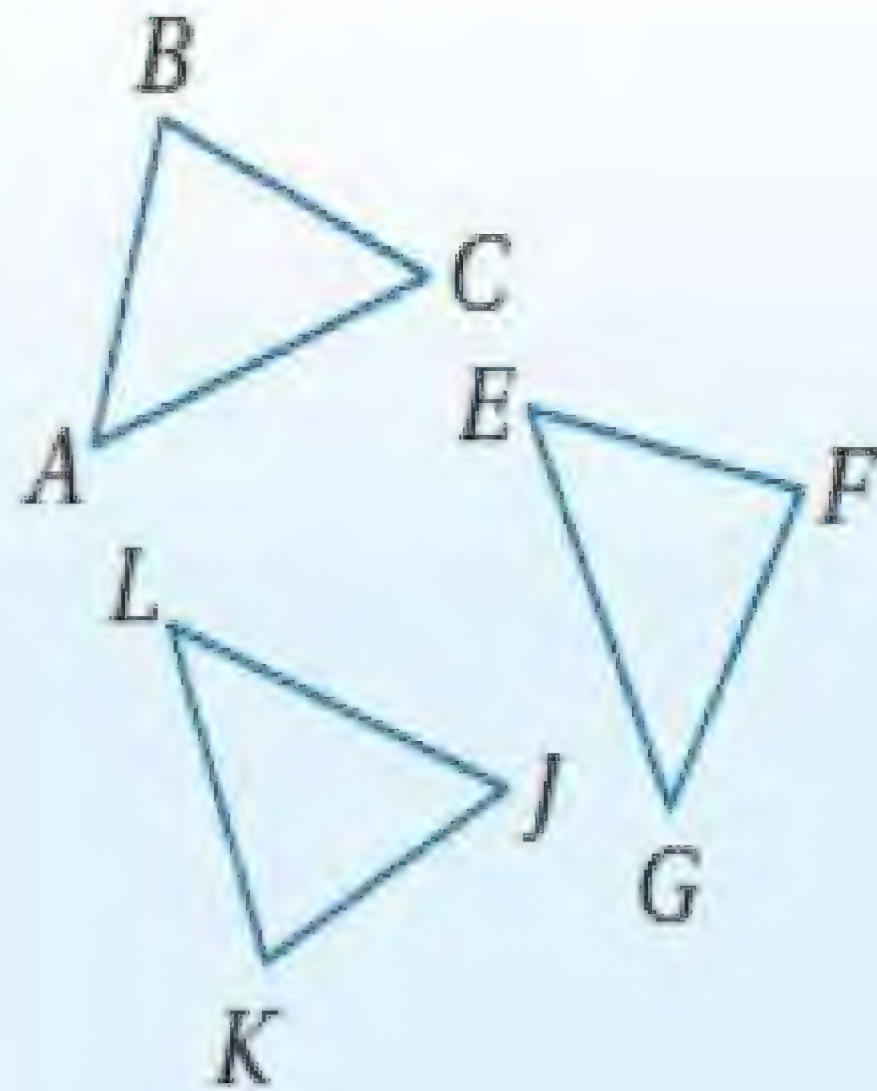
علاقة تطابق المثلثات علاقة انعكاس وتماثل وتعدّ كما في تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

### النظرية 3.4

#### خصائص تطابق المثلثات

أضف إلى

مطوية



خاصية الانعكاس للتطابق

$$\triangle ABC \cong \triangle ABC$$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كان  $\triangle ABC \cong \triangle EFG$  ، فإن  $\triangle EFG \cong \triangle ABC$  .

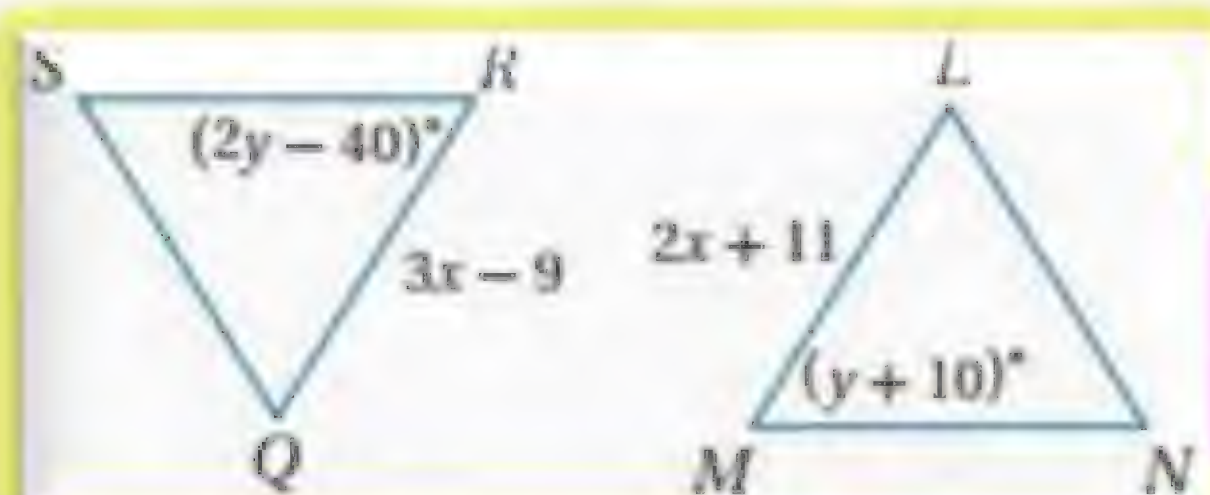
خاصية التعدي للتطابق

إذا كان  $\triangle ABC \cong \triangle EFG$  ،  $\triangle EFG \cong \triangle JKL$  ، فإن  $\triangle ABC \cong \triangle JKL$  .



## المثال ٢

في الشكلين المجاورين إذا كان،  $\triangle QRS \cong \triangle LMN$  فلو جد:



(4) قيمة  $y$ .

(3) قيمة  $x$ .

الحل

4)

$$\because \triangle LMN \cong \triangle QRS$$

$$\therefore \angle M = \angle R$$

$$(y + 10)^\circ = (2y - 40)^\circ$$

$$-y = -40 - 10$$

$$-y = -50$$

$$y = 50$$

3)

$$\because \triangle LMN \cong \triangle QRS$$

$$\therefore LM \cong QR$$

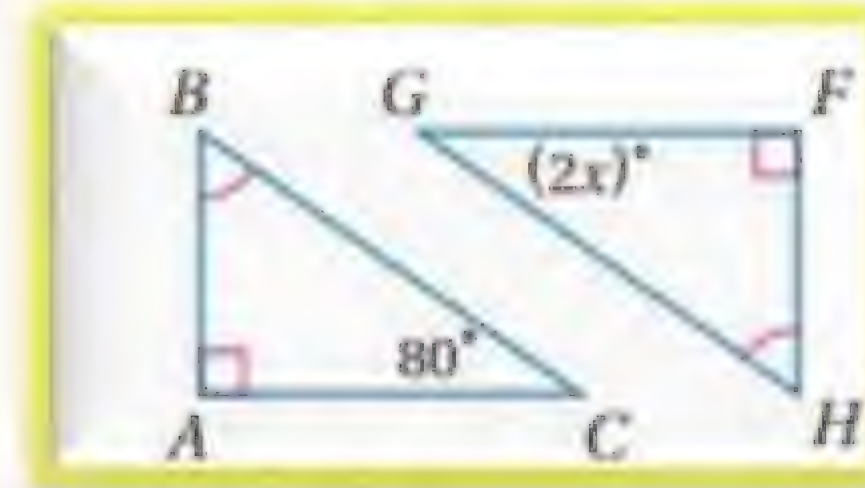
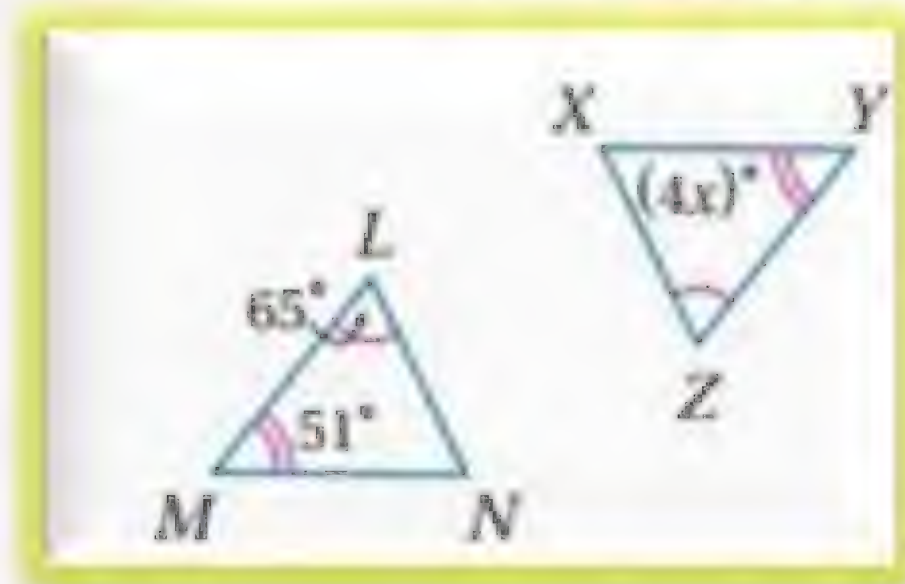
$$2x + 11 = 3x - 9$$

$$-x = -9 - 11 = -20$$

$$x = 20$$



في كل من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة  $x$ ، وفسر إجابتك :



بما أن كل من  $\triangle XYZ$  ,  $\triangle MLN$  يحتويان على زاويتان متطابقتان في كل منهما إذن قياس الزاوية الثالثة في كل منهما متطابقتان حسب نظرية الزاوية الثالثة

$$\angle X \cong \angle N$$

$$4X = \angle N$$

$$\angle N = 180 - (65 + 51)$$

$$\angle N = 64$$

$$4X = 64$$

$$X = 16$$

بما أن كل من  $\triangle BAC$  ,  $\triangle GFH$  يحتويان على زاويتان متطابقتان في كل منهما إذن قياس الزاوية الثالثة في كل منهما متطابقتان حسب نظرية الزاوية الثالثة

$$\angle G \cong \angle C$$

$$2X = 80$$

$$X = 40$$





المعطيات:  $\angle WXZ \cong \angle YXZ$ ,  $\angle XZW \cong \angle XZY$ ,  $WX \cong YX$ ,  $WZ \cong YZ$

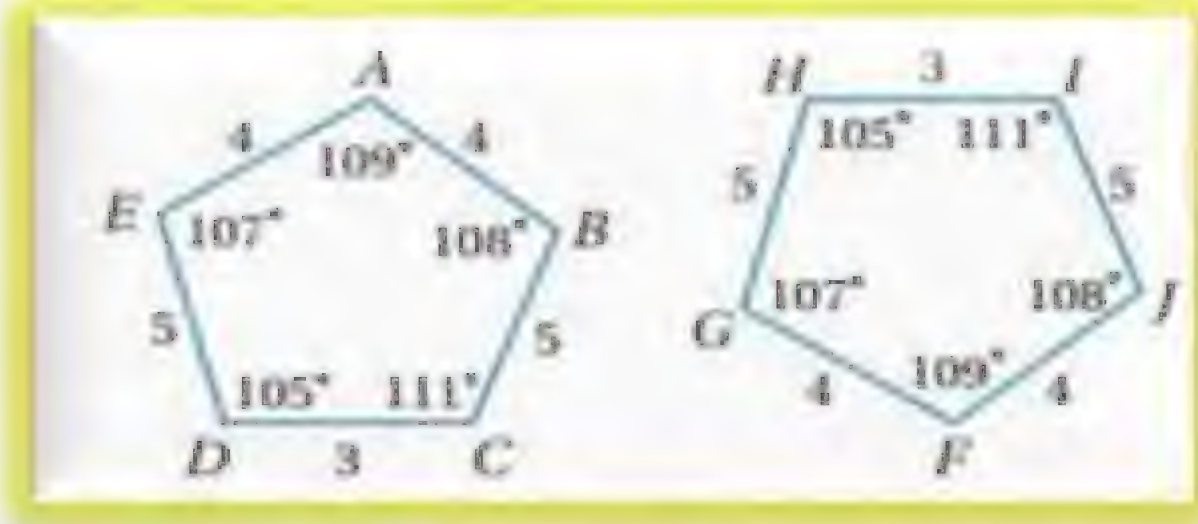
المطلوب:  $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

نعم أن  $WX \cong YX$ ,  $WZ \cong YZ$ ,  $XZ \cong XZ$   
 $\angle WXZ \cong \angle YXZ$ ,  $\angle XZW \cong \angle XZY$   
 وحسب نظرية الزاوية الثالثة تكون  $\angle Y = \angle W$   
 إذن  $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

الحل

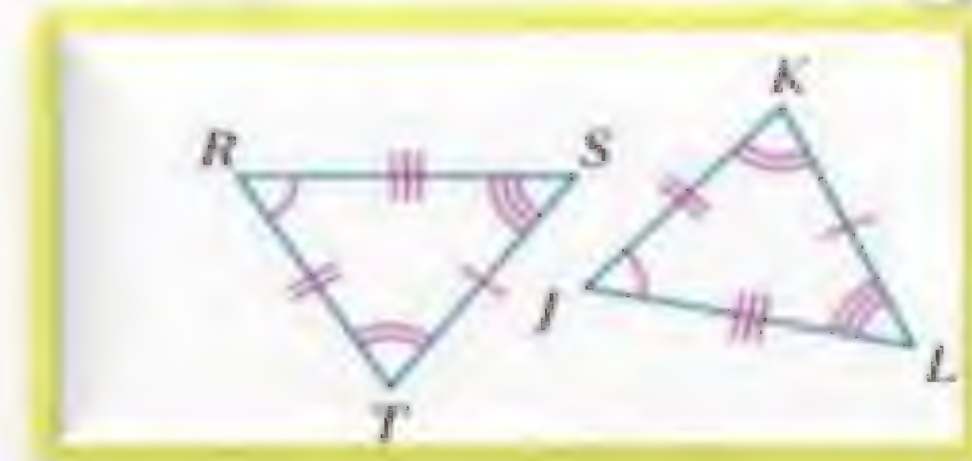
✓ تدرب وحل  
المسائل

في كل من المسائلين الآتيين، بين أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة، ثم اكتب عبارة التطابق:



$\angle A \cong \angle F$ ,  $\angle B \cong \angle J$ ,  $\angle C \cong \angle I$ ,  $\angle D = \angle H$ ,  
 $\angle E = \angle G$   
 $AB \cong FJ$ ,  $BC \cong JI$ ,  $CD \cong IH$ ,  $DE \cong HG$ ,  $AE$   
 $\cong FG$

إذن المضلع = المضلع FJIHG ABCDE



$\angle R \cong \angle J$ ,  $\angle T \cong \angle K$ ,  $\angle S \cong \angle L$   
 $RT \cong JK$ ,  $TS \cong KL$ ,  $RS \cong JL$

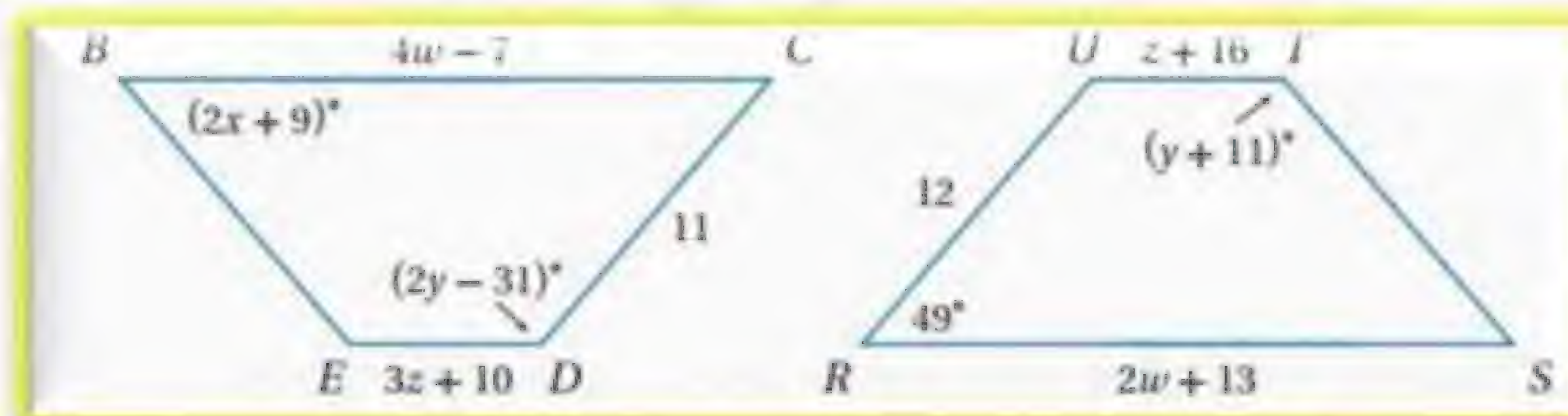
إذن  $\triangle RTS \cong \triangle JKL$

الحل



إذا كان المضلع  $BCDE \cong RSTU$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

المثال ٣



$y$  (11)

**11)**  
 $\therefore \angle D \cong \angle T$   
 $(2y - 31)^\circ = (y + 11)^\circ$   
 $y = 11 + 31$   
 $y = 42$

$x$  (10)

**10)**  
 $\therefore \angle R \cong \angle B$   
 $49^\circ = 2x + 9$   
 $49 - 9 = 2x$   
 $x = 20$

$w$  (13)

**13)**  
 $\therefore \overline{BC} \cong \overline{RS}$   
 $(4w - 7)^\circ = (2w + 13)^\circ$   
 $2w = 13 + 7$   
 $2w = 20$   
 $10 = w$

$z$  (12)

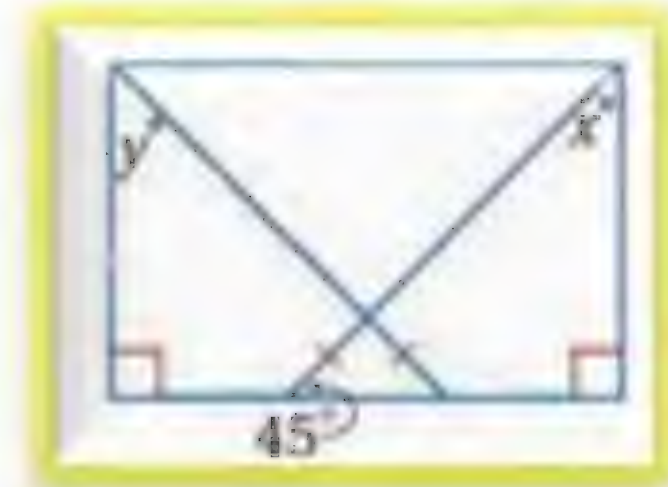
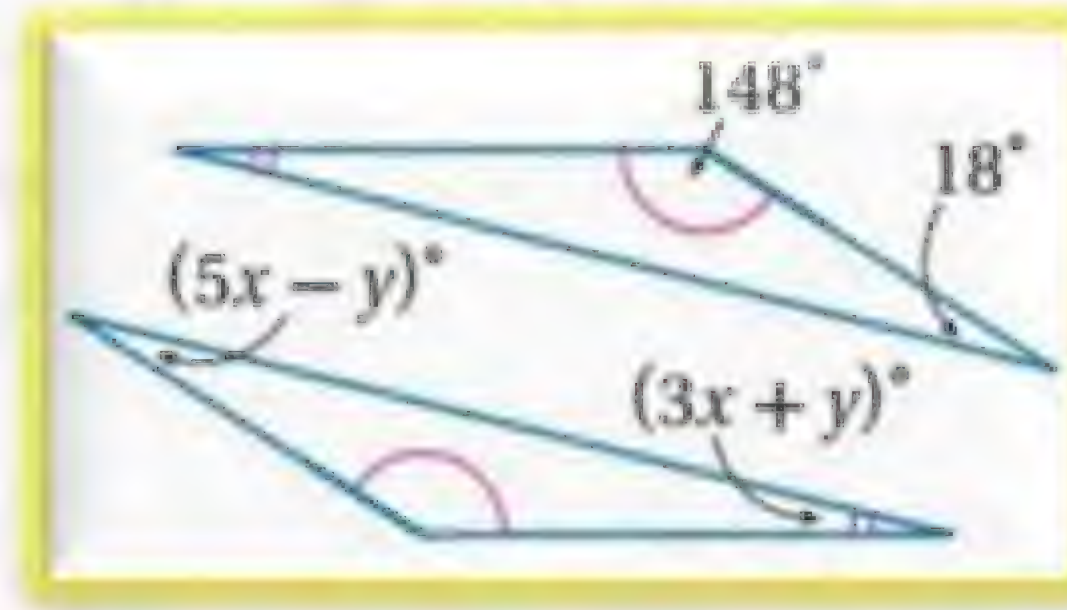
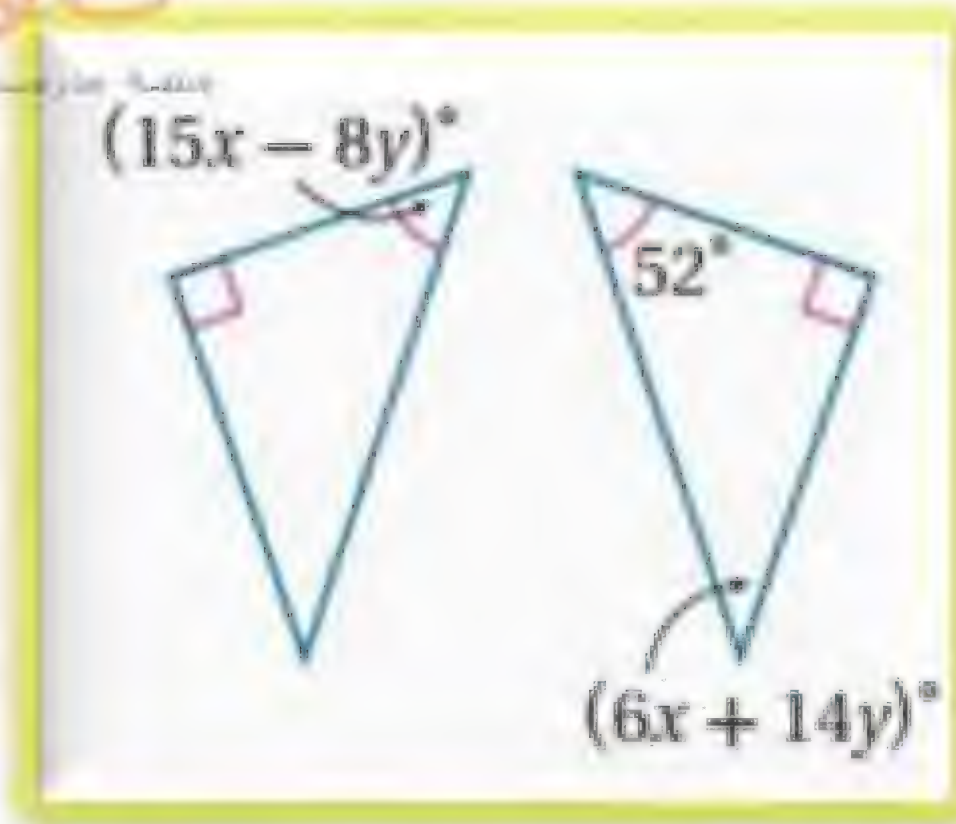
**12)**  
 $\therefore \overline{ED} \cong \overline{UT}$   
 $(3z + 10)^\circ = (z + 16)^\circ$   
 $2z = 16 - 10$   
 $z = 3$

الحل



### المثال ٣

أوجد قيمة كل من  $x, y$  في الأمثلة الآتية :



$$(15X - 8Y) = 52$$

$$(6X + 14Y) = 180 - (52 + 90)$$

$$6X + 14Y = 38 \rightarrow \times 2$$

$$3X + 7Y = 19 \rightarrow \times (-5)$$

$$-15X - 35Y = -95 \rightarrow 1$$

$$15X - 8Y = 52 \rightarrow 2$$

$$0 - 43Y = -43$$

$$Y = 1$$

$$15X - 8 \times 1 = 52$$

$$15X = 60$$

$$X = 4$$

$$(3X + Y) = 180 - (18 + 148)$$

$$3X + Y = 14 \rightarrow 1$$

$$5X - Y = 18 \rightarrow 2$$

$$8X = 32$$

$$X = 4$$

$$5 \times 4 - Y = 18$$

$$Y = 20 - 18$$

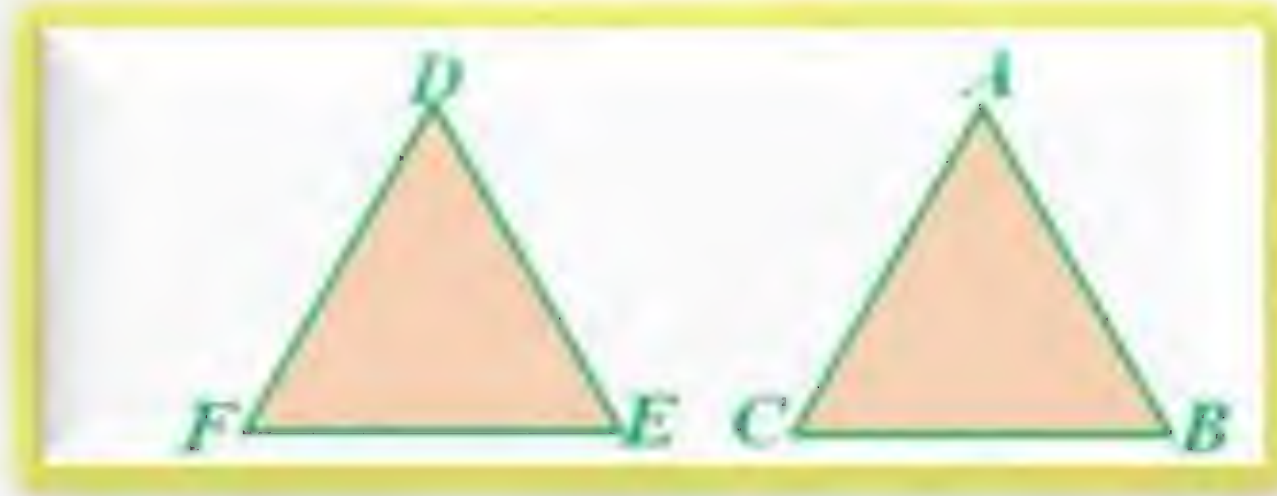
$$Y = 2$$

$$45 = Y$$

$$45 = X$$

لأن المثلث المتطابق الضلعين  
زواياه القاعدة له متساوية وكل  
منها = 45





$$(1) \angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E \text{ (معطيات)}$$

$$(2) m\angle A = m\angle D, m\angle B = m\angle E \text{ (تعريف الزوايا المتطابقة)}$$

$$(3) m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180, m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180$$

(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

$$(4) m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$$

(خاصية التعدي)

$$(5) m\angle D + m\angle E + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$$

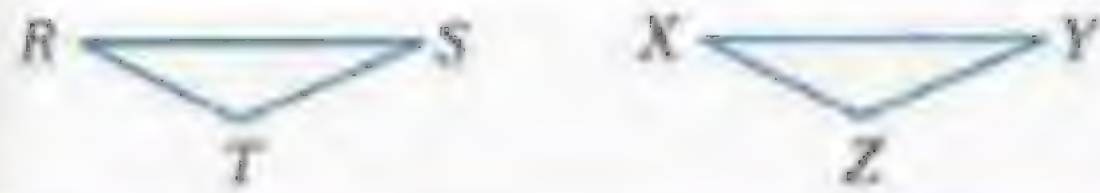
(خاصية التعويض)

$$(6) m\angle C = m\angle F \text{ (خاصية الطرح للمساواة)}$$

$$(7) \angle C \cong \angle F \text{ (الزوايا تعريف تطابق)}$$



(18) **برهان**، رتب العبارات المستعملة في برهان العبارة الآتية ترتيباً صحيحاً، وقدم تبريراً لكل عبارة.  
"تطابق المثلثات علاقة تماثل". (النظرية 3.4)



المعطيات،  $\triangle RST \cong \triangle XYZ$   
المطلوب،  $\triangle XYZ \cong \triangle RST$   
البرهان،

$\angle R \cong \angle X, \angle S \cong \angle Y,$	$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S,$
$\angle T \cong \angle Z,$	$\angle Z \cong \angle T,$
$\overline{RS} \cong \overline{XY}, \overline{ST} \cong \overline{YZ},$	$\overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{YZ} \cong \overline{ST},$
$\overline{RT} \cong \overline{XZ}$	$\overline{XZ} \cong \overline{RT}$

$\triangle XYZ \cong \triangle RST$        $\triangle RST \cong \triangle XYZ$       ?      ?



$\triangle RST \cong \triangle XYZ$

معطى

$\angle R \cong \angle X, \angle S \cong \angle Y, \angle T \cong \angle Z,$   
 $\overline{RS} \cong \overline{XY}, \overline{ST} \cong \overline{YZ}, \overline{RT} \cong \overline{XZ}$

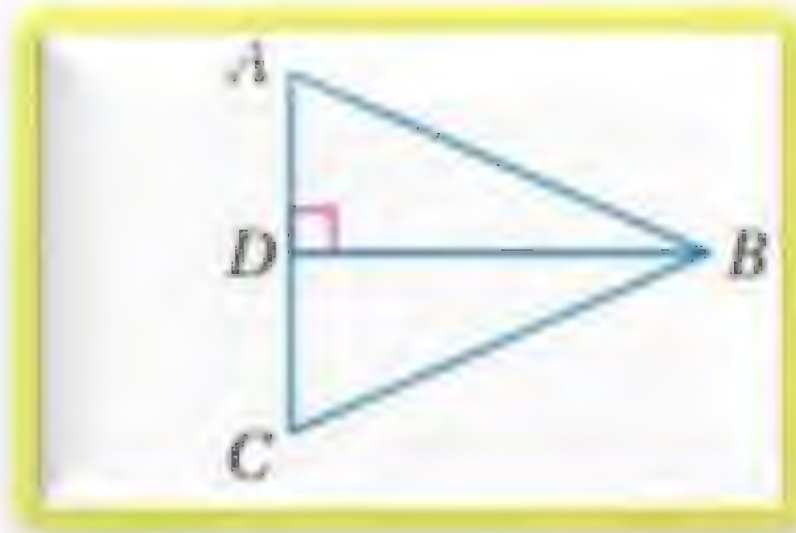
العناصر المتشابهة في المثلثين  
المتطابقين منطبقة

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T,$   
 $\overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{YZ} \cong \overline{ST}, \overline{XZ} \cong \overline{RT}$

تطابق الزوايا والقطع المستقيمة يحقق  
خاصية التماثل

$\triangle XYZ \cong \triangle RST$





(19) **برهان**، اكتب برهاناً ذا عمودين:

المعطيات،  $\overline{BD}$  تنصف  $\angle B$ ،  
 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

المطلوب،  $\angle A \cong \angle C$



(1)  $\overline{BD}$  تنصف  $\angle B$ ،  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$  (معطيات)

(2)  $\angle ABD \cong \angle DBC$  (تعريف منصف الزوايا)

(3)  $\angle ADB$ ،  $\angle BDC$  قائمتان (المستقيمان المتعامدان يكونان زاوية قائمة)

(4)  $\angle ADB \cong \angle BDC$  (الزوايا القائمة متطابقة)

(5)  $\angle A \cong \angle C$  نظرية الزاوية الثالثة



**برهان:** اكتب برهاناً من النوع المذكور لكل جزء من النظرية 3.4.

(20) تطابق المثلثات علاقة تعدد. (برهان حر)



نعلم أن  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$   
ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة  
فإن:  $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$ ،  
 $AB \cong DE, BC \cong EF, AC \cong DF$ .

نعلم أن  $\triangle DEF \cong \triangle GHI$  ولذا فإن:  
 $DE \cong GH, EF \cong HI, DF \cong GI, \angle D \cong \angle G, \angle E \cong \angle H,$   
 $\angle F \cong \angle I$

لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. وعليه فإن  
 $\angle A \cong \angle G, \angle B \cong \angle H, \angle C \cong \angle I$   
 $AB \cong GH, BC \cong HI, AC \cong GI$

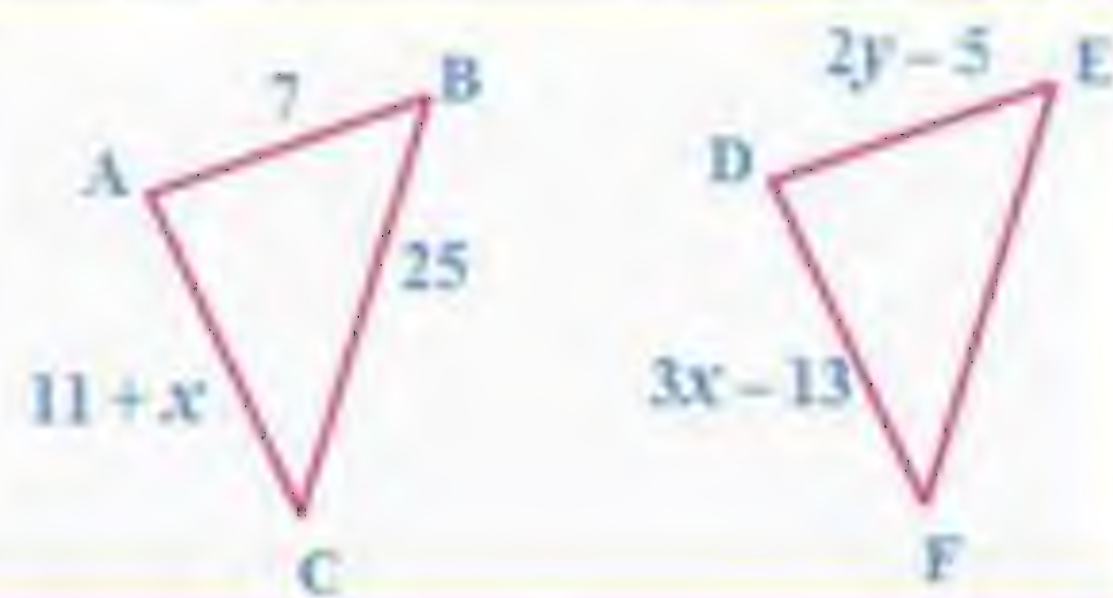
لأن تطابق الزوايا والقطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي وبهذا يكون  
 $\triangle ABC \cong \triangle GHI$  من تعريف المثلثين المتطابقين.





جبر: ارسم شكلاً يمثل المثلثين المتطابقين في كل من الساقين الأتيين، وسمه وأوجد قيمة  $x, y$ :

(22)  $\triangle ABC \cong \triangle DEF, AB = 7, BC = 25, AC = 11 + x, DF = 3x - 13, DE = 2y - 5$



$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$

$\therefore DE = AB$

$2Y - 5 = 7$

$2Y = 12$

$Y = 6$

$DF = AC$

$3X - 13 = X + 11$

$2X = 11 + 13$

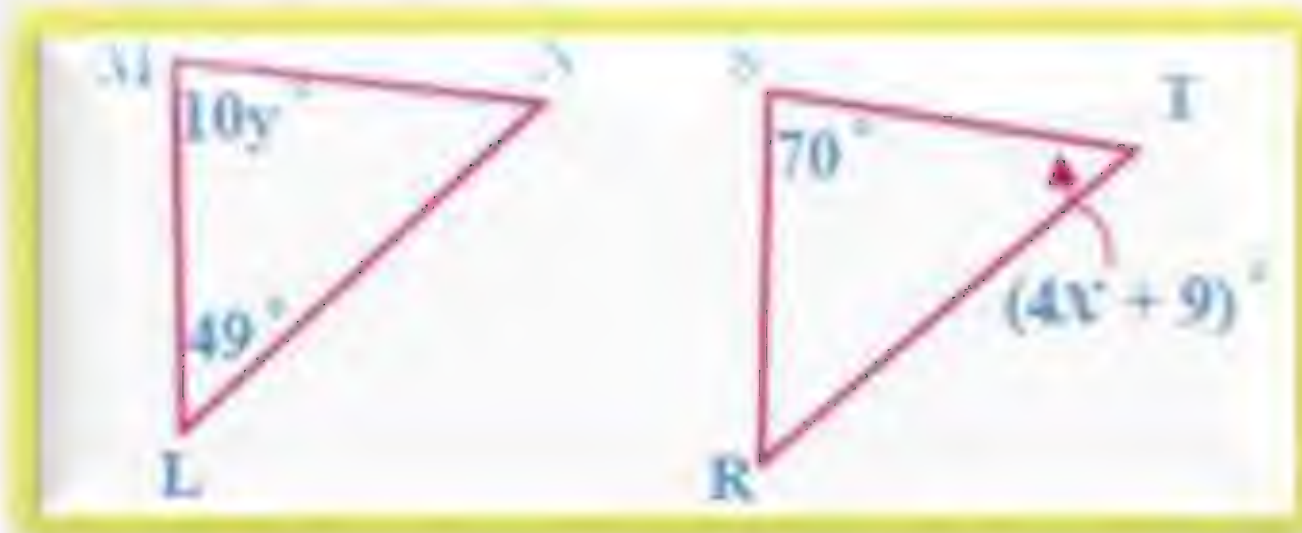
$2X = 24$

$X = 12$





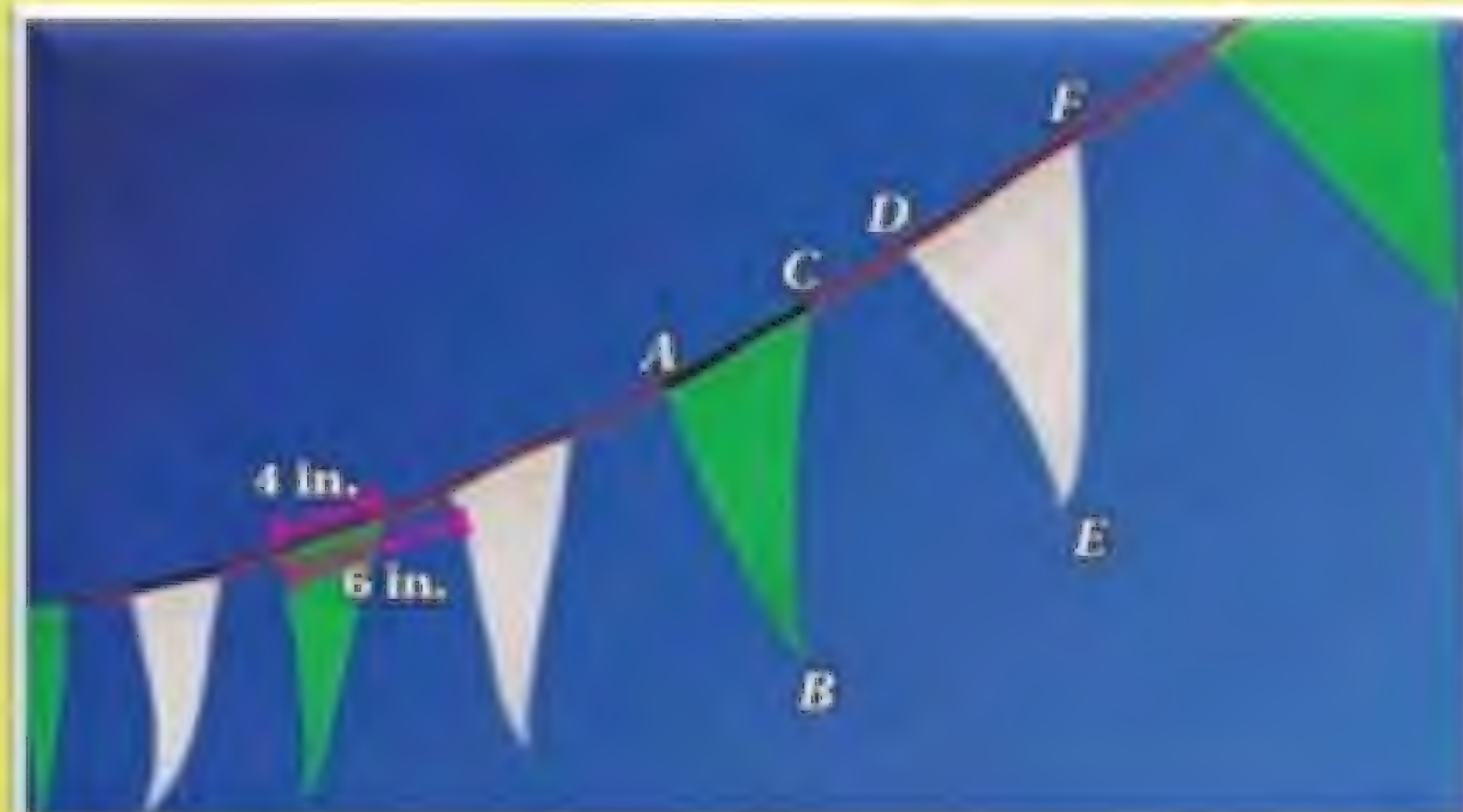
$$\triangle LMN \cong \triangle RST, m\angle L = 49^\circ, m\angle M = (10y)^\circ, m\angle S = 70^\circ, m\angle T = (4x + 9)^\circ \quad (23)$$



$$\begin{aligned} \therefore \triangle LMN &\cong \triangle RST \\ \angle M &= \angle T \\ 10y &= 70 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle N &= 180^\circ - (49^\circ + 70^\circ) \\ \angle N &= 61^\circ \\ \therefore \triangle LMN &\cong \triangle RST \\ \therefore \angle T &= \angle N \\ 4x + 9 &= 61 \\ 4x &= 52 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

(24) رايات، في مهرجان رياضي، كان سعيد مسؤولاً عن إحاطة منطقة مساحتها  $100 \text{ ft}^2$  مخصصة لجلوس المعلقين والإعلاميين، فاستعمل حبلاً وثبت عليه رايات على شكل مثلثات متطابقة، كل منها متطابق الضلعين. إرشاد:  $1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$

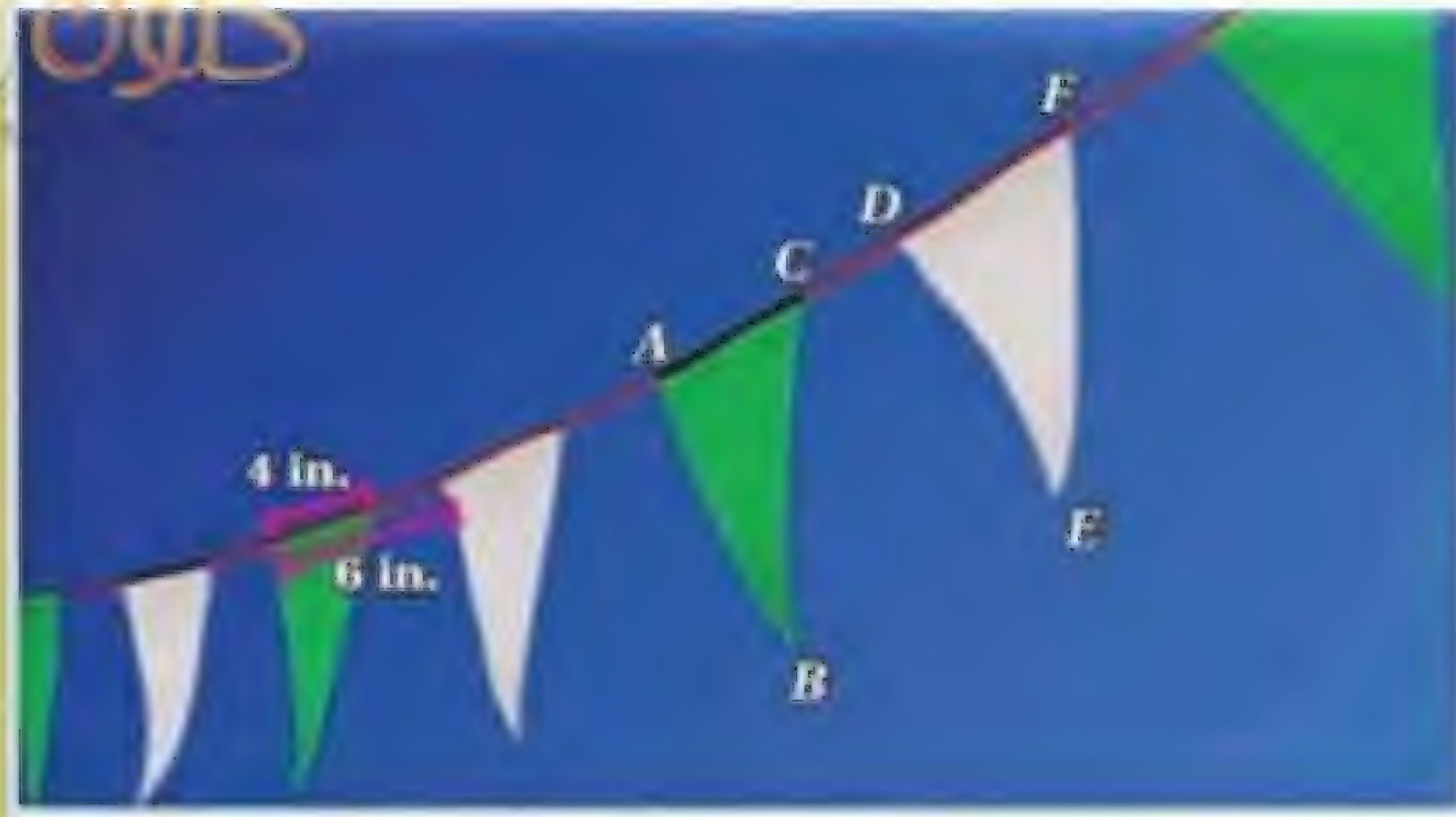


(a) اكتب سبعة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة في الصورة.



$$\begin{aligned} AB &= CB, AB = DE, AB = FE, \\ CB &= DE, CB = FE, DE = FE, AC = DF \end{aligned}$$





(b) إذا كانت المنطقة التي حوّلها سعيد بحبل الرايات مربعة الشكل، فكم سيكون طول الحبل؟

بما أن مساحة المنطقة مربعة = ١٠٠ قدم مربعة  
مساحة المربع = طول الضلع في نفسه، إذن طول الضلع  
= ١٠ وبالتالي سيكون طول الحبل  
 $40 = 10 + 10 + 10 + 10$



(c) ما عدد الرايات المثبتة بالحبل؟

يوجد 2 راية كل قدم من الحبل إذن  
راية  $80 = 2 \times 40$



(25) تمثيلات متعددة، في هذه المسألة سنكتشف العلاقة بين مساحات المضلعات المتطابقة:

(a) لفظيًا، اكتب عبارة شرطية تمثل العلاقة بين مساحتي مثلثين متطابقين.

**إذا تطابق مثلثان فإن مساحتهما متساويتان.**

(b) لفظيًا، اكتب عكس عبارتك الشرطية. وهل العبارة العكسية صحيحة أم خطأ؟ وضح تبريرك.

**العبارة الشرطية: إذا تساوت مساحتا مثلثين فإن المثلثين متطابقان. خطأ، فإذا كانت قاعدة المثلث 2 وارتفاعه 6 وكانت قاعدة مثلث آخر 3 وارتفاعه 4 فإن مساحتهما متساويتان ولكن هذين المثلثين غير متطابقين.**

(c) هندسيًا، ارسم - إن أمكن - مستطيلين لهما المساحة نفسها، ولكنهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.



(d) هندسيًا، ارسم - إن أمكن - مربعين لهما المساحة نفسها، ولكنهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.

**لا يمكن، لأن المربعين اللذين لهما المساحة نفسها يكون لاضلاعهما الطول نفسه وهو الجذر التربيعي للمساحة فإذا كانت المساحتان متساويتين يكون المربعان متطابقين**







(26) أنماط: صُمم النمط المجاور باستعمال مضلعات منتظمة.



(b) سمّ زوجاً من المثلثات المتطابقة.

(a) ما المضلعان المنتظمان اللذان استُعملا في التصميم؟

$$\triangle ABC \cong \triangle DEC$$

المضلع السداسي المنتظم والمثلث المتطابق الاضلاع

(d) إذا كان  $CB = 2$  in ، فكم يكون  $AE$ ؟ وضح إجابتك.

(c) سمّ زوجاً من الزوايا المتطابقة.

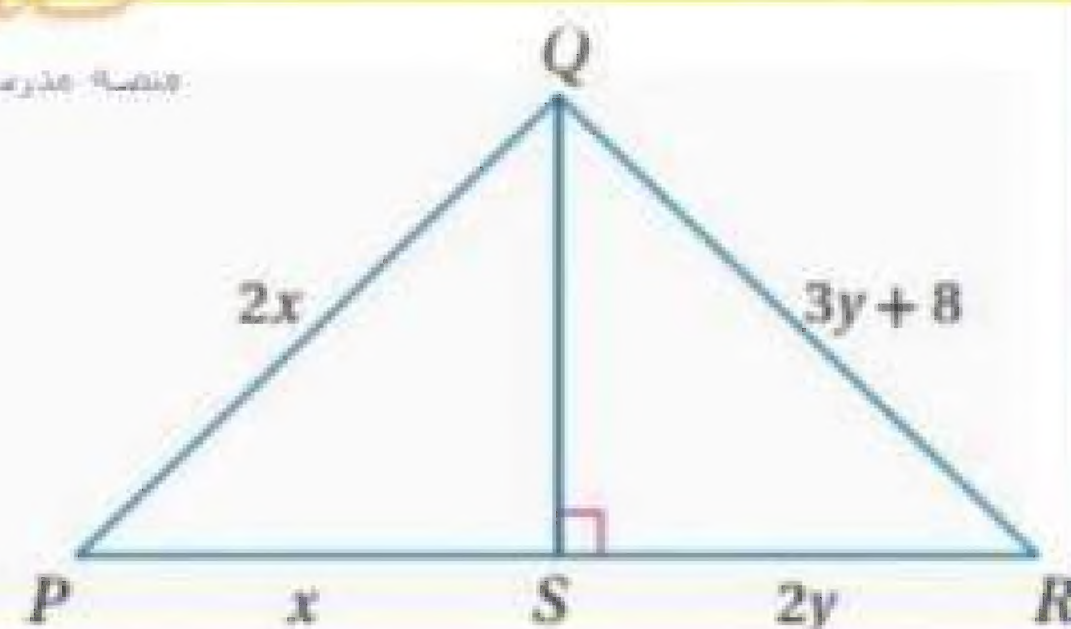
$$\angle B = \angle E$$

(e) ما قياس  $\angle EDC$ ؟ وضح إجابتك.

$AE = 4$  in ، لأن المضلعات التي صمم منها النمط منتظمة فأطوال أضلاع المثلثات جميعها متطابقة وهذا يعني أن طول  $CB$  يساوي طول كل من  $AC$  ،  $CE$  لذا فإن  $4 = 2 + 2 = CE + AC = AE$

$\angle D = 60^\circ$  ، لأن جميع مثلثات النمط منتظمة فهي مثلثات متطابقة الأضلاع ومتطابقة الزوايا، وتكون كل زاوية في أي مثلث مساوية لـ  $60^\circ$





## مهارات التفكير العليا

(27) **تحذّر**، إذا كان  $\Delta PQS \cong \Delta RQS$ ، فأوجد قيمة كل من  $x, y$ .

$$\Delta RQS \cong \Delta PQS$$

$$RS = PS$$

$$2y = x$$

$$RQ = PQ$$

$$3y + 8 = 2x$$

$$\therefore x = 2y$$

$$3y + 8 = 2 \times (2y)$$

$$3y - 4y = -8$$

$$-y = -8$$

$$y = 8$$

$$x = 2 \times 8$$

$$x = 16$$

الحل

**تبرير:** حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأ.

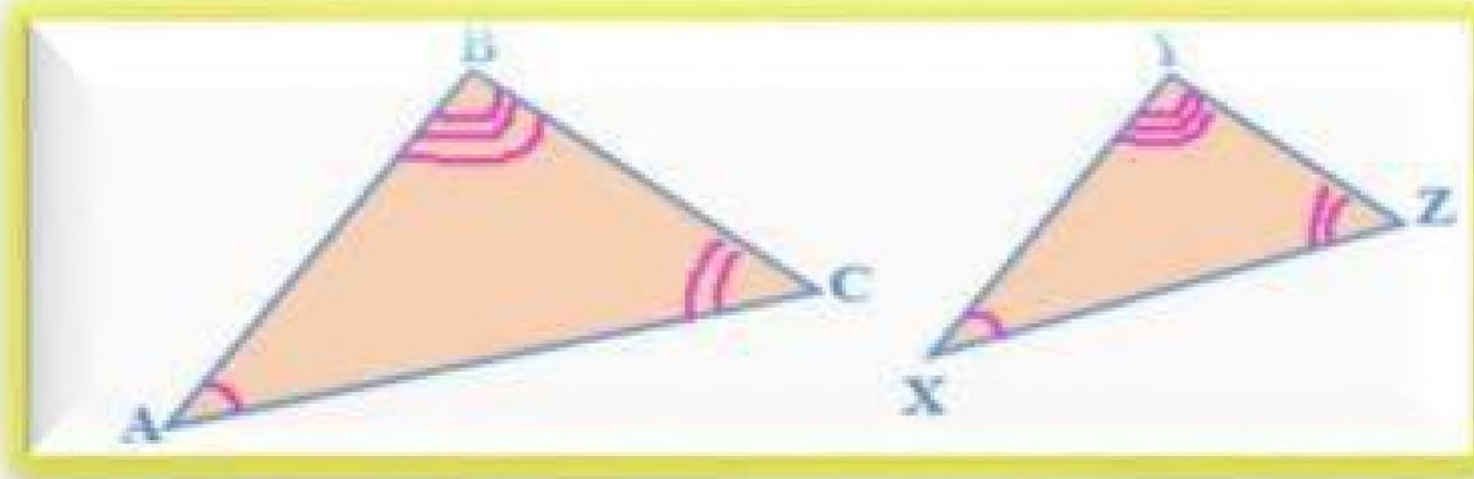
(28) إذا تطابق زوجان من الزوايا المتناظرة لمثلثين، وتطابقت الأزواج الثلاثة من أضلاعهما المتناظرة، فإن المثلثين متطابقان.

**صحيحة**، باستعمال نظرية الزاوية الثالثة، يكون الزوج الثالث من الزوايا متطابقان أيضا وجميع الأضلاع المتناظرة متطابقة، والن عناصر المتناظرة متطابقة فإن المثلثين متطابقان.

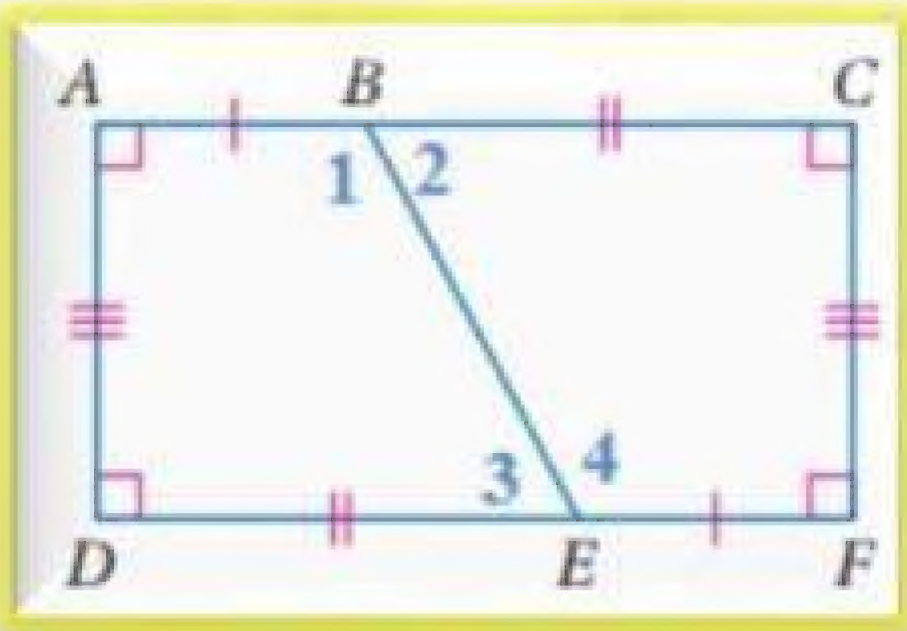
الحل



(29) إذا كانت أزواج الزوايا المتناظرة الثلاثة لمثلثين متطابقة، فإن المثلثين متطابقان.



خطأ،  $\angle A = \angle X, \angle B = \angle Y, \angle C = \angle Z$   
لكن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة.



(30) **تحذّر:** اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن المضلع  $ABED \cong$  المضلع  $FEBC$ .

**$AB = EF, ED = BC, AD = FC$**   
**الزوايا المتبادلة داخليا متطابقة فإن**  
 **$\angle 1 = \angle 4, \angle 2 = \angle 3$**   
**المضلع  $ABED =$  المضلع  $FEBC$**

(31) **اكتب:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو ليست صحيحة أبدًا.  
ووضح إجابتك.

"المثلثان المتطابقا الأضلاع يكونان متطابقين"

**صحيحة أحيانًا، يكون المثلثات المتطابقا الأضلاع**  
**متطابقين إذا تطابق زوج من الأضلاع المتناظرة فيها**